33 - FONCTIONS CONTINUES PRESQUE PARTOUT

www.daniel-saada.eu

Sauf mention du contraire, toutes les fonctions considérées vont de R dans R. On rappelle que dans un espace topologique E, un G_δ est une intersection finie ou dénombrable d'ouverts, un F_σ est une réunion au plus dénombrable de fermés. Quand E est métrique, tout ouvert (qui est un G_δ par définition) est un F_σ, tout fermé est à la fois un F_σ et un G_δ (**[4]**, p. 41).

1) L'ensemble des points de continuité d'une fonction numérique est un G_δ.

Démonstration de Michel Wirth (**[5]**). Soit f une fonction *numérique* définie sur un espace topologique E. Notons $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des intervalles de R à bornes rationnelles et dont la longueur n'excède pas $1/n$. L'ensemble $\mathcal{C}(f)$ des points de continuité de f est $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{I\in\mathcal{O}_n} \overset{0}{f^{-1}}(I)$, où $\overset{0}{f^{-1}}(I)$ désigne l'intérieur de $f^{-1}(I)$. Cela prouve que $C(f)$ est un G_δ de E.
Par complémentaire, l'ensemble des points de discontinuité de f forment un F_σ.

Complément. Si E est un espace normé séparable, tout G_δ de E est l'ensemble des points de continuité d'une fonction numérique définie sur E **[5]**.

Deuxième démonstration quand l'espace de départ est R.

a) *On suppose f bornée sur R*
L'oscillation de f en un réel x est par définition la différence, qui existe puisque f est bornée

$$\omega(x) = \lim_{h\to 0^+} \sup_{[x-h,x+h]} f(t) - \lim_{h\to 0^+} \inf_{[x-h,x+h]} f(t).$$

f est continue en x si et seulement si $\omega(x)=0$ car $\omega(x)=0$ équivaut à $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$.
On démontre (**[2]**, p. 37) que chaque $\{x\in R : \omega(x)<1/n\}$ est un ensemble ouvert. Il en résulte que $\{x\in R : \omega(x)=0\} = \bigcap_n \{x\in R : \omega(x)<1/n\}$ est un G_δ.

b) *On ne suppose plus f bornée sur R.*
Soit φ un homéomorphisme de R sur un intervalle *borné* ouvert : f et $\varphi\circ f$ ont même points de continuité et l'ensemble des points de continuité de $\varphi\circ f$ est un G_δ d'après **a)**.

Pour φ, on peut choisir $\arctan$, ou $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.

Lorsque f va de R dans R, f est continue presque partout quand le F_σ des points de discontinuité, qui est un borélien, est de mesure nulle ; le G_δ des points de continuité est alors dense dans R.
Évidemment, f est continue presque partout quand le F_σ des points de discontinuité est dénombrable.

2) Fonctions de première classe de Baire sur un espace métrique

a) On dit qu'une fonction *numérique*, définie sur un espace métrique (E,d), est de première classe de Baire si l'image réciproque de tout ouvert de R est un F_σ de E et donc l'image réciproque de tout fermé est un G_δ. Une fonction continue est de première classe, la réciproque étant fausse car la classe des F_σ est strictement plus vaste que les ouverts. On démontre (**[3]**, p. 103 et **[4]**, p. 239) qu'une fonction est de première classe si et seulement si elle est limite simple d'une suite de fonctions continues.

Exemple. La dérivée d'une fonction dérivable f est la limite de la suite des fonctions continues $x \mapsto \dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$; de ce fait, les zéros de f' forment un G_δ, qui se réduit à un fermé quand f' est continue.

b) Quand E est *complet* pour la distance d, l'ensemble des points de continuité d'une fonction de première classe est *dense* [1]. En effet, l'ensemble des points de discontinuité de f est $\mathcal{D}(f)=\bigcup_{U\in\mathcal{B}}\left(f^{-1}(U)-\overset{0}{f^{-1}}(U)\right)$ où $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts[2] de R et $\overset{0}{f^{-1}}(U)$ désigne l'intérieur de $f^{-1}(U)$. La raison est la suivante : f est discontinue en x si et seulement si il existe un voisinage V de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ ne soit pas un voisinage de x. Comme f est de première classe, $f^{-1}(U)$ est un F_σ et $f^{-1}(U)-\overset{0}{f^{-1}}(U)$ également ; comme on peut choisir $\mathcal{B}$ dénombrable, $\mathcal{D}(f)$ est bien un F_σ. Aussi, $\mathcal{C}(f)$ est-il un G_δ, reste à montrer qu'il est dense. Par définition de l'intérieur, $f^{-1}(U)-\overset{0}{f^{-1}}(U)$ est d'intérieur vide, on dit rare, aussi $\mathcal{D}(f)$ est une réunion dénombrable d'ensembles rares, on dit maigre : comme E est complet, $\mathcal{D}(f)$ est encore d'intérieur vide en vertu du théorème de Baire et $\mathcal{C}(f)$ est dense.

Exemple. Une fonction dérivée a des points de continuité sur tout intervalle non réduit à un point.

3) Une fonction f dont l'ensemble des discontinuités est au plus dénombrable est borélienne

Soit D l'ensemble dénombrable des discontinuités de f, U un ouvert de R, $V=f^{-1}(U)$.

Soit $x\in V-\overset{\circ}{V}$, où $\overset{\circ}{V}$ est l'intérieur de V : $u=f(x)\in U$; comme U est ouvert, il existe un ouvert W tel que $u\in W\subset U$. On a $x\in f^{-1}(W)\subset V$: il en résulte que $f^{-1}(W)$ n'est pas ouvert, sinon x serait dans $\overset{\circ}{V}$, et donc que f n'est pas continue en x

V est donc la réunion de son intérieur, qui est un ouvert, et de points de discontinuités :

[1] On trouvera une démonstration plus classique dans **[4]**, p. 239.

[2] Par exemple, l'ensemble des intervalles à extrémités rationnelles.

$V = \overset{\circ}{V} + V \cap D$ est donc un borélien et f est borélienne comme annoncé.

On remarquera que $V = f^{-1}(U)$ est la réunion de son intérieur avec un dénombrable : $f^{-1}(U)$ est donc un F_σ et f est de première classe de Baire ; de ce fait, f est limite simple d'une suite de fonctions continues. Dans le langage des variables aléatoires :

toute fonction X de R dans R continue sauf sur un dénombrable est une variable aléatoire ;
de plus, X est limite simple d'une suite de fonctions continues.

4) Exemples de fonctions dont l'ensemble des discontinuités est au plus dénombrable

Pour démontrer qu'une fonction f de R dans R a un nombre dénombrable de discontinuités, il faut et il suffit que la restriction de f à tout segment ait un nombre dénombrable de discontinuités. En effet, $R = \bigcup_n [-n,n]$. On se bornera donc à supposer que f va de $[a,b]$ dans R.

1) *Les fonctions monotones*
Ce résultat est classique. Pour une démonstration, consulter par exemple **[4]**, page 28.

2) *Les fonctions réglées*
Les fonctions réglées sont les fonctions admettant en tout point une limite à droite et une limite à gauche (comme les monotones). Dans **[1]**, page 183, on prouve qu'une fonctions réglée f est limite *uniforme* sur $[a,b]$ d'une suite (h_n) de fonctions en escalier. Chaque h_n n'a qu'un nombre fini D_n de discontinuités. Du fait de la convergence uniforme, f est continue sur $R - D$, où $D = \bigcup_n D_n$.

3) *Les fonctions continues à droite* (*ou à gauche*) (Alain Rémondière)

Soit f continue à droite sur $[a,b[$.

a) On suppose de plus f bornée sur $[a,b]$.

Introduisons l'oscillation $\omega^-(x)$ de f *à gauche* en $x \in]a,b]$, qui existe car f est bornée :

$$\omega^-(x) = \lim_{h \to 0^+} \sup_{[x-h,x]} f(t) - \lim_{h \to 0^+} \inf_{[x-h,x]} f(t) .$$

Comme f est déjà continue à droite, f est continue en x si et seulement si $\omega^-(x) = 0$.

Pour prouver que l'ensemble des x en lesquels $\omega^-(x) > 0$ est au plus dénombrable, il suffit de prouver que $E(r) = \left\{x \in]a,b] : \omega^-(x) > r\right\}$ est dénombrable pour tout réel $r > 0$ car $\left\{x : \omega(x) > 0\right\} = \bigcup_n E(1/n)$. On fixe donc $r > 0$ pour la suite.

Comme $E(r) = E(r) \cap]a,b]$ on introduit $L = \left\{x \in]a,b] : E(r) \cap]a,x] \text{ est } \textit{dénombrable}\right\}$.

L n'est pas vide car du fait de la continuité à droite en a de f , il existe $h > 0$ tel que $E(r) \cap]a,a+h]$ est vide.

Soit c la borne supérieure de L : c est dans L car une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Il est impossible que c soit $< b$ du fait de la continuité de f à droite en c . Ainsi, $c = b$ et $E(r) =]a,b]$.

b) On ne suppose plus f bornée sur $[a,b]$.

On raisonne comme précédemment sur le composé $\varphi \circ f$, où φ est un homéomorphisme de R sur un intervalle borné : $\varphi \circ f$ est bornée sur $[a,b]$ et est continue à droite en tout point, donc $\varphi \circ f$ est continue sauf sur un ensemble dénombrable et il en est de même de f puisque $f = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f)$.

5) Une fonction f continue presque partout est Lebesgue-mesurable

Soit N l'ensemble négligeable des discontinuités de f , U un ouvert de R , $V = f^{-1}(U)$.

Soit $x \in V - \overset{\circ}{V}$, où $\overset{\circ}{V}$ est l'intérieur de V : $u = f(x) \in U$; comme U est ouvert, il existe un ouvert W tel que $u \in W \subset U$. On a $x \in f^{-1}(W) \subset V$: il en résulte que $f^{-1}(W)$ n'est pas ouvert, sinon x serait dans $\overset{\circ}{V}$, et donc que f n'est pas continue en x

V est donc la réunion de son intérieur, qui est un ouvert, et de points de discontinuités :

$V = \overset{\circ}{V} + V \cap N$ est donc la réunion d'un ouvert et d'un négligeable : c'est un mesurable et f est mesurable comme annoncé.

Exemples de fonctions continues presque partout. Si F est un fermé de R de mesure nulle, la fonction indicatrice de l'ouvert (dense) $R - F$ est continue presque partout.

Fonctions intégrables au sens de Riemann. Selon un théorème de Lebesgue (**[1]**, p. 273), une fonction f définie sur un segment $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si elle est bornée et continue presque partout sur $[a,b]$. f est donc mesurable au sens de Lebesgue.

On sait aussi que ses sommes de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ ont pour limite $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

Pour une utilisation des sommes de Riemann en Probabilités, consulter
http://www.daniel-saada.eu/Notes/Probabilites_et_sommes_de_Riemann.pdf

6) il existe des fonctions continues presque partout non boréliennes (Clément de Seguins Pazzis)

a) Un exemple de fonction continue presque partout qui n'est pas de première classe de Baire

Soit K l'ensemble de Cantor, ensemble des réels $x = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ avec $a_n \in \{0,2\}$ pour tout n : on rappelle que K est compact, de mesure nulle et a la puissance du continu.

Désignons par T l'ensemble des rationnels triadiques : $x = \sum_1^{N} \frac{a_n}{3^n}$ avec $a_n \in \{0,1,2\}$ pour tout n .

Détermination de $K \cap T$.

Un x de K est dans T si et seulement si à partir d'un certain rang $(N+1)$ a_n vaut constamment 0

ou 2. Dans le premier cas, $x=\sum_1^N \frac{a_n}{3^n}$ avec $a_N=2$, dans le deuxième cas,

$$x=\sum_1^{N-1}\frac{a_n}{3^n}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\sum_1^{N-1}\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3^N}=\sum_1^N\frac{a_n}{3^n} \text{ avec } a_N=1.$$

Définition de f. Pour $x\in K\cap T$, on pose $f(x)=\sum_1^N 3^n a_n$, de sorte que $f\geq 3$ sur $K\cap T$. On prolonge f sur $[0,1]$ en posant $f(x)=0$ sur $[0,1]-K\cap T$. Sur l'ouvert $[0,1]-K$, f est constante donc continue.

f *est discontinue en tout point de* K. Si x est dans $K\cap T$, $f(x)\geq 3$, et on peut approcher x par une suite (x_n) de $K-T$, or $f(x_n)=0$. En effet, le théorème de Baire implique que

$$K-T=\bigcap_{t_n\in T}(K-t_n) \text{ est dense dans } K.$$

Si x est dans $K-T$, $f(x)=0$, et on peut approcher x par une suite (x_n) de $K\cap T$, or $f(x_n)\geq 3$.

En effet, il suffit de tronquer la série qui donne $x=\sum_1^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$.

L'ensemble des points de discontinuité de f est donc exactement K : comme K est de mesure nulle, f est continue presque partout.

f *n'est pas de première classe de Baire*. La démonstration qui a été faite de la discontinuité de f en tout point de K prouve que la *restriction* de f sur K, notée g, n'a aucun point de continuité. Si f était de première classe, elle serait limite d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ et donc g serait limite d'une suite de fonctions continues sur le compact K. Comme K est un espace métrique complet, g aurait des points de continuité sur K en vertu de **2 b)**.

Remarque. La réciproque de l'assertion énoncée en **2 b)** est donc fausse.

b) Un exemple de fonction continue presque partout qui n'est pas borélienne

On modifie pour ce faire f de la façon suivante : comme K a la puissance du continu et T est dénombrable, $K-T$ a également la puissance du continu ; il existe donc dans $K-T$ un sous-ensemble B qui n'est pas borélien (**[4]**, p. 128). On impose $f(x)=2$ pour tout x dans B, le reste étant inchangé.

f reste continue en tout point de $[0,1]-K$ (mieux, K est exactement l'ensemble des points de discontinuité), elle est donc continue presque partout et cependant $f^{-1}(2)=B$: comme B n'est pas borélien, f n'est pas borélienne (elle reste cependant mesurable au sens de Lebesgue).

BIBLIOGRAPHIE

[1] JEAN-MARIE ARNAUDIÈS, *L'intégrale de Lebesgue sur la droite*, Vuibert, 1997.

[2] JACQUES CHAILLOU ET JACQUES HENRY, *Problèmes de Topologie*, Masson, 1971.

[3] CLAUDE MAYER, *Outils topologiques et métriques de l'Analyse mathématique*, CDU.

[4] DANIEL SAADA, *Tribus et probabilités sur les univers infinis*, consultable partiellement sur http://books.google.fr/books?id=kq69nXaoV-AC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false

[5] MICHEL WIRTH, *Maths Xtrêmes–Thèmes et problèmes*, Ellipses, 2009.