

21 - PROMENADES ALÉATOIRES PLANES À PAS CONSTANT

www.daniel-saada.eu

On se promène dans un plan en faisant des pas de longueur 1, les directions de chaque pas étant aléatoires mais uniformes et indépendantes entre 0 et 2π radians. Si le point de départ de la promenade est l'origine O du plan rapporté à un repère orthonormé, la variable aléatoire égale à la position du $n^{\text{ième}}$ pas est

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, X_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i),$$

les angles θ_i étant uniformes et indépendants sur $[0, 2\pi[$.

S_n est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 , sa norme $\|S_n\|$ est une variable aléatoire réelle. Le but de cet article est l'étude de ces deux variables aléatoires. Dans une première partie on prouve, par récurrence sur n , que S_n a une densité f_n pour $n \geq 2$; dans la seconde, on exprime f_n pour $n \geq 4$ à l'aide des fonctions de Bessel J_n . Un formulaire recensant leurs principales propriétés figure en fin d'article.

Dans \mathbb{R}^n , le produit scalaire de deux vecteurs t et x est noté $\langle t, x \rangle : \langle t, x \rangle = \sum_{i=1}^n t_i x_i$; la norme $\|x\|$ de x sera abrégée en $|x|$ quand aucune confusion ne sera à craindre; de même, on s'autorisera à écrire $|S_n|$ au lieu de $\|S_n\|$.

C_n désigne l'univers $[0, 2\pi[^n$ muni de sa tribu borélienne et de la probabilité $p_n = \lambda_n / (2\pi)^n$, λ_n étant la mesure de Borel-Lebesgue sur C_n . On désignera par \mathcal{B}^n la tribu des boréliens de \mathbb{R}^n .

PARTIE I : les S_n ont une densité pour $n \geq 2$

1) Densités d'une variable aléatoire

Si X est une variable aléatoire de (Ω, \mathcal{T}, p) dans \mathbb{R}^n , sa loi est la probabilité p_X , définie sur \mathcal{B}^n par

$$p_X(B) = p(X \in B) = p(X^{-1}(B)).$$

Par définition de l'intégrale, $p(X^{-1}(B)) = \int_{\Omega} 1_{X^{-1}(B)} dp = \int_{\Omega} (1_B \circ X) dp$ et $p_X(B) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dp_X$, d'où

$\int_{\Omega} (1_B \circ X) dp = \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dp_X$, égalité que le théorème du transfert étend aux fonctions φ intégrables pour p_X :

$$\int_{\Omega} (\varphi \circ X) dp = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dp_X.$$

mais que nous limiterons aux fonctions mesurables bornées.

X a pour densité f signifie que $p_X(B) = \int_B f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} (1_B \cdot f) d\lambda_n$ pour tout borélien B de \mathbb{R}^n , f étant une fonction réelle positive et intégrable sur \mathbb{R}^n . Comme $p_X(B) = \int_{\Omega} (1_B \circ X) dp$, avoir f pour densité se traduit par

$$\int_{\Omega} (1_B \circ X) dp = \int_{\mathbb{R}^n} (1_B \cdot f) d\lambda_n$$

et on démontre alors que pour toute φ mesurable bornée sur \mathbb{R}^n : $\int_{\Omega} (\varphi \circ X) dp = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \cdot f) d\lambda_n$.

Réciproquement, si $\int_{\Omega} (\varphi \circ X) dp = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \cdot f) d\lambda_n$ pour toute φ mesurable bornée, alors on aura évidemment $\int_{\Omega} (1_B \circ X) dp = \int_{\mathbb{R}^n} (1_B \cdot f) d\lambda_n$ pour tout borélien B .

Il est manifeste aussi que si $p_X = p_Y$ et si X a une densité f , alors f est aussi une densité de Y : la densité ne dépend pas de la représentation de X . Il en résulte que l'univers sur lequel est définie S_n est (C_n, p_n) , les variables aléatoires uniformes sur $[0, 2\pi[$ et indépendantes pour p_n étant les n applications $(\theta_1, \dots, \theta_n) \rightarrow \theta_i$.

$S_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ n'a pas de densité : en effet, le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est de mesure (surface) nulle, donc on devrait avoir $p(S_1 \in C) = 0$, alors que $p(S_1 \in C) = 1$.

2) Détermination de la densité f_2 de S_2 par changement de variables

Abandonnons les indices : notre problème est trouver une densité de $(u, v) \rightarrow (\cos u + \cos v, \sin u + \sin v)$ c'est-à-dire de dégager une fonction f positive et intégrable sur \mathbb{R}^2 telle que pour toute φ mesurable bornée

$$\int_{C_2} \varphi(\cos u + \cos v, \sin u + \sin v) dp_2 = \int_{C_2} \varphi(\cos u + \cos v, \sin u + \sin v) \frac{du dv}{4\pi^2} = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy.$$

Posons $x = \cos u + \cos v$, $y = \sin u + \sin v$, $\omega(u, v) = (\cos u + \cos v, \sin u + \sin v)$: on a $x^2 + y^2 = 2 + 2\cos(u - v)$, ω est de classe C^1 (dérivées partielles continues) et son jacobien J vaut $\sin(v - u)$.

Le carré C_2 est la réunion du triangle $\mathcal{T} = \{(u, v) \in C_2 : 0 \leq u \leq v < 2\pi\}$ et de son symétrique par rapport à $y = x$.

L'écriture complexe de ω , $u + iv \rightarrow e^{iu} + e^{iv}$, montre que son image est contenue dans le disque fermé $D'(0, 2)$.

ω est surjective : on résout $e^{iu} + e^{iv} = z$ quand $0 < |z| \leq 2$ en conjuguant l'équation et on trouve

$$\{e^{iu}, e^{iv}\} = \left\{ \frac{z + iz\sqrt{4 - |z|^2}}{2}, \frac{z - iz\sqrt{4 - |z|^2}}{2} \right\}$$

Si $0 < |z| < 2$, z a deux antécédents, l'un dans \mathcal{T} , l'autre dans son symétrique ; $z = 0$ en a une infinité ; $|z| = 2$ un seul. L'ensemble des $\omega(u, u)$ est le cercle $S(0, 2)$, les $\omega(u, \pi)$ décrivent le cercle $|z + 1| = 1$ et les $\omega(0, v)$ le cercle $|z - 1| = 1$. Il en résulte que :

$$\omega \text{ est une bijection de l'ouvert } \mathcal{U} = \{(u, v) \in C_2 : 0 < u < v < 2\pi \text{ et } v \neq u + \pi\} \\ \text{sur l'ouvert } \mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \text{ et } |z - 1| \neq 1 \text{ et } |z + 1| \neq 1\}.$$

Comme J ne s'annule pas sur \mathcal{U} , le th du changement de variable donne

$$\int_{\mathcal{U}} \varphi(\cos u + \cos v, \sin u + \sin v) du dv = \int_{\mathcal{V}} \varphi(x, y) \frac{1}{|J(u, v)|} dx dy$$

$$\text{avec } |J(u, v)| = |\sin(u - v)| = \sqrt{1 - \cos^2(u - v)} = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + y^2 - 2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2)}.$$

D'autre part, $\int_{C_2} \varphi(\cos u + \cos v, \sin u + \sin v) du dv = 2 \int_{\mathcal{T}} \varphi(\cos u + \cos v, \sin u + \sin v) du dv$ par symétrie et négli-

geabilité de la diagonale et $\int_T \varphi(\cos u + \cos v, \sin u + \sin v) dudv = \int_U \varphi(\cos u + \cos v, \sin u + \sin v) dudv$.

Aussi, $\int_V \varphi(x, y) \frac{1}{|J(u, v)|} dx dy = \int_{D(0,2)} \varphi(x, y) \frac{1}{|J(u, v)|} dx dy$. Il en résulte que

$$\int_{C_2} \varphi(\cos u + \cos v, \sin u + \sin v) dudv = \frac{4}{4\pi^2} \int_{D(0,2)} \frac{\varphi(x, y)}{\sqrt{(x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2)}} dx dy$$

et que la densité de S_2 est $f_2(x, y) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2)}}$ sur $D(0, 2)$ et 0 à l'extérieur (on remarquera

que f_2 est infinie en 0 et sur la circonférence).

3) Un théorème sur la densité

Soit B et B' deux boréliens du plan qui s'échangent par une symétrie orthogonale d'axe passant par 0. Si une promenade de n pas a mené de 0 à un point A de B , le symétrique de cette promenade va mener de 0 à un point A' de B' : il en résulte que $p(S_n \in B) = p(S_n \in B')$; on dit que S_n est invariante par les symétries orthogonales d'axe contenant 0. En composant ces symétries, on en déduit que $p(S_n \in B) = p(S_n \in B')$ quand B et B' s'échangent par une rotation de centre 0 ; on dira sans surprise que S_n est invariante par les rotations de centre 0.

Nous allons prouver :

Si une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^2 est invariante par les rotations de centre 0

et si $\|X\|$ a une densité f , alors X a pour densité $x \rightarrow \frac{f(\|x\|)}{2\pi \|x\|}$ sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration (Alain Rémondière)

Il suffit de prouver que $p(X \in B) = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{f(\|x\|)}{\|x\|} dx$ pour tout borélien B de $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$. Pour ce faire, on va

construire une famille de boréliens qui engendre la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$, qui soit stable par intersection finie et sur laquelle p_X et l'intégrale coïncident (théorème de la classe monotone).

Introduisons $\varphi : (x, y) \rightarrow (r, \theta)$, qui est une bijection bicontinue de $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$ sur $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$. On sait que les $B \times A$, où B est un borélien de $]0, +\infty[$ et A un borélien de $]0, 2\pi[$, engendrent la tribu des boréliens de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$. Il en résulte que les $\varphi^{-1}(B \times A)$, notés $A.B$, engendrent la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$.

Reste à prouver que $p_X(A.B) = \frac{1}{2\pi} \int_{A.B} \frac{f(\|x\|)}{\|x\|} dx$. La démonstration va se faire en deux temps. Dans un premier

temps, munissons l'univers \mathbb{R}^2 de la probabilité $p_X = p \circ X^{-1}$, \mathbb{R}^+ de p_Y définie par $p_Y(B) = p(\|X\| \in B)$ et $]0, 2\pi[$ de $p_1 = \lambda / 2\pi$, où λ est la mesure de Lebesgue, et prouvons que $p_X(A.B) = p_Y(B) \times p_1(A)$ (autrement dit, $p_X \circ \varphi^{-1}$ est la probabilité produit $p_Y \otimes p_1$).

Pour B fixé, $A \rightarrow (p_X \circ \varphi^{-1})(B \times A)$ est une mesure de probabilité sur les boréliens de $]0, 2\pi[$; cette mesure est invariante par translation (modulo 2π) car $B \times (A + t)$ est l'image de $B \times A$ par la rotation de centre 0 et d'angle t . Il en résulte que $(p_X \circ \varphi^{-1})(B \times A)$ est proportionnelle à $\lambda(A)$: $(p_X \circ \varphi^{-1})(B \times A) = k(B)\lambda(A)$. Quand on choisit $A =]0, 2\pi[$, $\varphi^{-1}(B \times A)$ est l'ensemble des (x, y) dont la norme est dans B et $(p_X \circ \varphi^{-1})(B \times A) = p_Y(B)$ (réfléchir), d'où $k(B) = p_Y(B) / 2\pi$.

Si de plus (deuxième temps), $Y = \|X\|$ a une densité f , $p_X(A.B) = \frac{\lambda(A)}{2\pi} \int_B f = \frac{\lambda(A)}{2\pi} \int_{R^+} 1_B(r) f(r) dr$, et alors

$$p_X(A.B) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^+ \times [0, 2\pi[} 1_B(r) f(r) 1_A(\theta) dr d\theta, \text{ ce qui en cartésiennes donne}$$

$$p_X(A.B) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} 1_{B \times A}(r, \theta) f(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} 1_{A.B}(x, y) \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \text{ CQFD.}$$

Application : on retrouve la densité f_2 de S_2

$$\|S_2\| \leq x \text{ équivaut à } \cos(u - v) \leq \frac{x^2 - 2}{2} \text{ et donc } p(\|S_2\| \leq x) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{x^2 - 2}{2}\right) \text{ car}$$

$$p_2(\{(u, v) \in C_2 : \cos(u - v) \leq t\}) = p_1(\{x \in C_1 : \cos x \leq t\}).$$

On obtient la densité de $\|S_2\|$ en dérivant $p(\|S_2\| \leq x) : \frac{2}{\pi\sqrt{4 - x^2}}$ sur $]0, 2[$ et 0 ailleurs. On retrouve la densité

de $S_2 : \frac{1}{\pi^2 |x| \sqrt{4 - |x|^2}}$ lorsque $x \in D(0, 2)$.

4) Existence de la densité f_n de S_n pour $n \geq 3$

Par récurrence sur n , l'hypothèse étant que S_n a une densité f_n :

a) $1 + S_n$ a pour densité $x \rightarrow f_n(x - 1)$, 1 s'entendant comme $(1, 0)$;

b) puisque $1 + S_n$ a une densité, il en est de même de sa norme ;

c) $\|S_{n+1}\|$ a une densité

d) comme $\|S_{n+1}\|$ a une densité, S_{n+1} aussi.

Passons aux démonstrations :

$$\text{a) } p(1 + S_n \in B) = p(S_n \in B - 1) = \int_{B-1} f_n(x, y) dx dy = \int_B f_n(x - 1, y) dx dy.$$

b) Quand une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^2 possède une densité, sa norme aussi car

$$p(\|X\| \leq R) = p(X \in D(0, R)) = \int_{D(0, R)} f(x, y) dx dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

et donc $\|X\|$ a pour densité $r \rightarrow r \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$.

c) $\|S_{n+1}\|$ a même densité que $\|1 + S_n\|$ car ces deux variables aléatoires réelles ont même fonction de réparti-

tion : soit E l'événement de C_{n+1} défini par $|e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + \dots + e^{i\theta_n} + e^{i\theta_{n+1}}| \leq R$ et soit F l'événement de C_n défini par $|e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + \dots + e^{i\theta_n} + 1| \leq R$; les équivalences

$$(\theta_1, \dots, \theta_{n+1}) \in E \Leftrightarrow (\theta_1 - \theta_{n+1}, \dots, \theta_n - \theta_{n+1}) \in F \Leftrightarrow (\theta_1, \dots, \theta_n) \in F + (\theta_{n+1}, \dots, \theta_{n+1})$$

montrent que $p_{n+1}(E) = \int_0^{2\pi} p_n(F) \frac{d\theta_{n+1}}{2\pi} = p_n(F)$. Comme la dérivée (presque partout) de la fonction de répartition est une densité de $\|1 + S_n\|$, cette dérivée est également une densité de $\|S_{n+1}\|$.

d) Grâce au théorème exposé en **3)**, S_{n+1} a pour densité $f_{n+1}(x) = \frac{g_{n+1}(|x|)}{2\pi|x|}$, où g_{n+1} est une densité de $\|S_{n+1}\|$; comme $\|S_{n+1}\| \leq n+1$, f_n est nulle en dehors du disque fermé $D'(O, n)$.

Remarque. Une fois établi que S_2 et S_3 ont des densités, les décompositions

$$S_{2n} = \sum_{p=1}^n (X_{2p-1} + X_{2p}) \quad S_{2n+1} = S_3 + \sum_{p=2}^n (X_{2p} + X_{2p+1})$$

auraient montré aussi que S_n est à densité pour tout $n \geq 4$ car les sommes $X_p + X_{p+1}$ ont, comme S_2 , une densité et sont indépendantes.

5) La fonction de répartition de $\|S_3\|$

On a vu que la fonction de répartition de $\|S_3\|$ est égale à celle de $\|1 + S_2\|$: on peut fixer l'angle θ_3 à 0. En posant $\theta_1 = u$ et $\theta_2 = v$, $\|1 + S_2\|^2 = (1 + \cos u + \cos v)^2 + (\sin u + \sin v)^2 = 3 + 2 \cos(u - v) + 2 \cos u + 2 \cos v$.

$\|1 + S_2\| \leq x$ est donc l'événement $E = \left\{ (u, v) \in C_2 : \cos(u - v) + \cos u + \cos v \leq \frac{x^2 - 3}{2} \right\}$.

A v constant, posons $E_v = \left\{ u \in C_1 : 2 \cos(u - \frac{v}{2}) \cos \frac{v}{2} \leq \frac{x^2 - 3}{2} - \cos v \right\}$. Or

$F(t) = p(\{u \in [0, 2\pi[: \cos u \leq t\}) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos t$ si t entre -1 et 1 , 0 si $t < -1$, 1 si $t > 1$, et par translation,

$p_1(\{u \in C_1 : \cos u \leq t\}) = p_1(\{u \in C_1 : \cos(u - \lambda) \leq t\})$ quand $\lambda \in [0, \pi]$. Aussi quand $v \in [0, \pi]$,

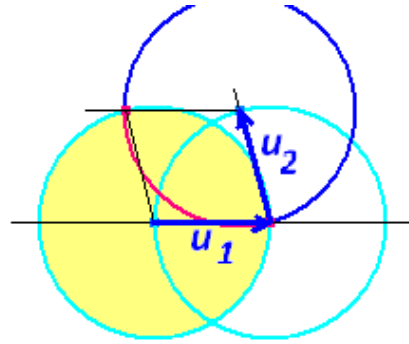
$$p_1(E_v) = F\left(\frac{\frac{x^2 - 3}{2} - \cos v}{2 \cos(v/2)}\right) \text{ et } p_1(E_v) = 1 - F\left(\frac{\frac{x^2 - 3}{2} - \cos v}{2 \cos(v/2)}\right) \text{ quand } v \in]\pi, 2\pi[.$$

$$\text{Comme } p_2(E) = \int_0^{2\pi} p_1(E_v) \frac{dv}{2\pi}, \quad p(\|S_3\| \leq x) = \frac{1}{2} + \int_0^{\pi} F\left(\frac{\frac{x^2 - 3}{2} - \cos v}{2 \cos(v/2)}\right) \frac{dv}{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} F\left(\frac{\frac{x^2 - 3}{2} - \cos v}{2 \cos(v/2)}\right) \frac{dv}{2\pi}.$$

Application : calcul de $p(\|S_3\| \leq 1)$

$$\text{Quand } x = 1, \quad \frac{\frac{x^2 - 3}{2} - \cos v}{2 \cos(v/2)} = -\cos(v/2) = \cos(\pi - v/2), \quad F\left(\frac{\frac{x^2 - 3}{2} - \cos v}{2 \cos(v/2)}\right) = \frac{v}{2\pi} \text{ et } \boxed{p(\|S_3\| \leq 1) = 1/4}.$$

On peut expliquer ce dernier résultat comme suit :



Il n'y a aucun inconvénient à fixer le vecteur \vec{u}_1 horizontalement et à supposer \vec{u}_2 dans le demi-plan supérieur.

Si β désigne l'angle orienté (\vec{u}_1, \vec{u}_2) , la probabilité que le troisième vecteur ait son extrémité dans le disque jaune est, \vec{u}_2 étant fixé, $\beta / 2\pi$ (longueur de l'arc en rouge divisée par la longueur du cercle). Comme \vec{u}_2 varie uniformément sur son demi-cercle supérieur, la probabilité cherchée est la valeur moyenne de $\beta / 2\pi$ sur $[0, \pi]$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\beta}{2\pi} d\beta = \frac{1}{4}.$$

Quelques valeurs numériques :

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$p(\ S_3\ \leq x)$	0,05	0,25	0,52	0,70	0,86	1,0
densité de $\ S_3\ $	0,20	1,17	0,41	0,34	0,30	0,14

Nous donnerons en 6) Partie 2 une autre formule intégrale, plus compacte, pour $p(\|S_3\| \leq x)$.

PARTIE II : une expression des densités f_n

Cette partie utilise massivement les fonctions de Bessel J_n : un formulaire recensant leurs principales propriétés figure en fin d'article.

1) Le théorème du transfert pour un vecteur aléatoire

Si X est une variable aléatoire de (Ω, \mathcal{T}, p) dans \mathbb{R}^n et si u est une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$, alors $\int_{\Omega} (u \circ X) dp = \int_{\mathbb{R}^n} u dp_X$ dès que u est intégrable pour p_X . Quand elle existe, l'intégrale $\int_{\Omega} (u \circ X) dp$ se note $E[u \circ X]$: c'est l'espérance de la variable aléatoire réelle $u \circ X$.

Quand X a une densité f , $\int_{\mathbb{R}^n} u dp_X = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx$. Par exemple, $E(e^{i\langle t, X \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} f(x) dx$ en séparant parties réelle et imaginaire. Si de plus $n = 2$, $\int_{\mathbb{R}^2} u dp_X = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) f(x, y) dx dy$ et $E[\|X\|]$ s'obtient

avec $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} : E[|X|] = \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y) dx dy$.

Rappelons qu'on a également $E[|X|] = \int_0^{+\infty} (1 - F_{|X|}(x)) dx$, $F_{|X|}$ étant la fonction de répartition de $|X|$.

2) La transformation de Fourier pour les fonctions numériques définies sur \mathbb{R}^n

Si f à valeurs réelles est intégrable sur \mathbb{R}^n , sa transformée de Fourier, définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , est

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varepsilon \langle t, x \rangle} f(x) dx \text{ existe sur } \mathbb{R}^n \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si \hat{f} est à son tour intégrable, on a presque partout en x la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\varepsilon \langle t, x \rangle} \hat{f}(t) dt.$$

On peut donner une forme symétrique à cette formule d'inversion quand f et \hat{f} sont intégrables :

$$\text{Si } \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\varepsilon \langle t, x \rangle} f(x) dx, \text{ alors } f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\varepsilon \langle t, x \rangle} \hat{f}(t) dt \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

En conclusion, si une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^n a une densité f , $E(e^{i \langle t, X \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle t, x \rangle} f(x) dx$

et si $t \rightarrow E(e^{i \langle t, X \rangle})$ est intégrable sur \mathbb{R}^n , alors $\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \langle t, x \rangle} E(e^{i \langle t, X \rangle}) dt = f(x)$ presque partout.

3) Détermination de la densité f_n de S_n pour $n \geq 4$

Rappelons (**Partie 1**) que S_n a une densité, notée f_n , pour tout $n \geq 2$, nulle quand $\|x\| > n$.

Par linéarité du produit scalaire, $e^{i \langle t, S_n \rangle} = \prod_{k=1}^n e^{i \langle t, X_k \rangle}$, et grâce à l'indépendance supposée des X_i

$$E(e^{i \langle t, S_n \rangle}) = E(e^{i \langle t, X_1 \rangle})^n.$$

Si $t = (t_1, t_2)$, $E(e^{i \langle t, X_1 \rangle}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(t_1 \cos \theta + t_2 \sin \theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i|t| \cos \theta} d\theta$ par périodicité ; par parité, il vient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i|t| \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(|t| \cos \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(|t| \cos \theta) d\theta.$$

D'où $E(e^{i \langle t, X_1 \rangle}) = J_0(|t|)$, fonction de Bessel d'indice 0 (**Formulaire**) et donc

$$E(e^{i \langle t, S_n \rangle}) = J_0(|t|)^n \text{ pour } n \geq 1$$

Le passage en coordonnées polaires donne

$$\int_{\mathbb{R}^2} J_0(|t|)^n dt = 2\pi \int_{\mathbb{R}^+} r J_0(r)^n dr$$

et enseigne que $J_0(|t|)^n$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $n \geq 4$. Une densité f_n de S_n est donc

$$f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i \langle t, x \rangle} J_0(|t|)^n dt \text{ pour } n \geq 4.$$

En passant encore en coordonnées polaires : $f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[} e^{-ir(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} J_0(r)^n r dr d\theta$, d'où

$$f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} r J_0(r)^n dr \int_0^{2\pi} e^{-ir|x| \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} r J_0(r)^n J_0(r|x|) dr$$

Remarque. La formule $f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} r J_0(r)^n J_0(r \|x\|) dr$ ne peut s'étendre à $n = 2$ ou $n = 3$, car l'intégrale diverge pour ces deux entiers.

4) Évaluation de $p(\|S_n\| \leq R)$ pour $n \geq 4$

On utilise $p(\|S_n\| \leq R) = p(S_n \in B(0, R)) = \int_{B(0, R)} f_n(x) dx$.

Comme $f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} t J_0(t)^n J_0(t \|x\|) dt$ ne dépend que de la norme de x , on passe en coordonnées polaires :

$$\int_{B(0, R)} f_n(x) dx = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} t J_0(t)^n J_0(tr) dt \right) d\theta = \int_0^R r \left(\int_0^{+\infty} t J_0(t)^n J_0(tr) dt \right) dr.$$

Le théorème de Fubini s'applique sur le rectangle d'intégration si la fonction $|rt J_0(t)^n J_0(tr)|$ est intégrable sur $[0, R] \times [0, +\infty[$. C'est le cas pour $n \geq 4$ car (**Formulaire**) sur $[0, R] \times [1, +\infty[$:

$$|rt J_0(t)^n J_0(tr)| \leq L\sqrt{rt} |J_0(t)^n| \leq L\sqrt{Rt} (L/\sqrt{t})^n \leq (L^{n+1}\sqrt{R})/t\sqrt{t}.$$

On a donc $\int_{B(0, R)} f_n(x) dx = \int_0^R r \left(\int_0^{+\infty} t J_0(t)^n J_0(tr) dt \right) dr = \int_0^{+\infty} t J_0(t)^n \left(\int_0^R r J_0(tr) dr \right) dt$.

Mais $\int_0^R r J_0(tr) dr = -R J_0'(tR)$ car $\int_0^x t J_0(t) dt = -x J_0'(x)$ (**Formulaire**) et donc

$$p(\|S_n\| \leq R) = R \int_0^{+\infty} -J_0(t)^n J_0'(Rt) dt = R \int_0^{+\infty} J_0(t)^n J_1(Rt) dt \text{ pour } n \geq 4$$

Le calcul de $p(\|S_n\| \leq 1)$

Pour $n \geq 4$, $p(\|S_n\| \leq 1) = \left[\frac{J_0(t)^{n+1}}{n+1} \right]_{t=+\infty}^{t=0} = \frac{1}{n+1}$, résultat remarquablement simple, qui s'étend à $n = 2$ et à

$n = 3$: $p(\|S_2\| \leq 1) = \frac{2 \arcsin(1/2)}{\pi} = \frac{1}{3}$ et $p(\|S_3\| \leq 1) = \frac{1}{4}$ comme on l'a vu en 5) Partie 1.

Ce résultat est mentionné dans la littérature mathématique anglo-saxonne sous le nom de *Rayleigh's Theorem*.

OLIVIER BERNARDI en donne une démonstration directe sur <http://arxiv4.library.cornell.edu/abs/1007.4870v1> en

montrant plus généralement que $p(|S_i| \leq |S_j|) = \frac{j}{i+j}$ ($i \neq j$).

5) Une question

$p(\|S_n\| \leq R) = R \int_0^{+\infty} J_0(t)^n J_1(Rt) dt$, valable pour $n \geq 4$, est-elle vraie pour $n = 2, 3$ (les intégrales existent) ?

A cette question, nous n'apporterons que des réponses numériques :

a) $p(\|S_3\| \leq R)$ et $R \int_0^{+\infty} J_0(t)^3 J_1(Rt) dt$ coïncident en $R = 1, 2, 3$.

b) $p(\|S_2\| \leq R) = \frac{2 \arcsin(R/2)}{\pi}$ se confond avec $R \int_0^{+\infty} J_0(t)^2 J_1(Rt) dt$ pour $R = 1(0,33)$ mais pas pour $R = 3/2$: l'intégrale vaut $0,33$ et la probabilité $0,54$.

6) Moyenne de $\|S_n\|$; calculs pour $n = 10$

$E[\|S_n\|] = \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x^2 + y^2} f_n(x, y) dx dy$, avec $f_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} t J_0(t)^n J_0(t\sqrt{x^2 + y^2}) dt$ pour $n \geq 3$, formule

malcommode. Nous lui préférons :

$$E[\|S_n\|] = \int_0^{+\infty} (1 - p(\|S_n\| \leq R)) dR, \text{ avec } p(\|S_n\| \leq R) = R \int_0^{+\infty} J_0(t)^n J_1(Rt) dt$$

et comme $\|S_n\| \leq n$,

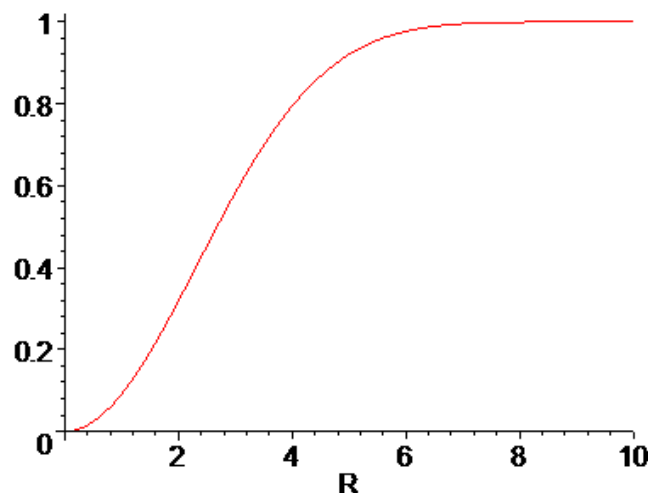
$$E[\|S_n\|] = \int_0^n (1 - p(\|S_n\| \leq R)) dR = n - \int_0^n p(\|S_n\| \leq R) dR.$$

On suppose désormais $n = 10$.

Tableau de valeurs. Les valeurs de $p(\|S_{10}\| \leq k$ pour k entier allant de 0 à 10 sont :

0 0,0909 0,3188 0,5829 0,7944 0,9205 0,9768 0,9954 0,9992 0,9999 1.

Graphe de $R \rightarrow p(\|S_{10}\| \leq R)$. La fonction de répartition de $\|S_{10}\|$ semble présenter un point d'inflexion :



Le calcul numérique de $E[\|S_{10}\|] = 10 - \int_0^{10} p(\|S_{10}\| \leq R) dR$

Le logiciel Maple affiche 7,18 pour l'intégrale sous l'instruction **Digits:=3**, on peut contrôler par la méthode des rectangles avec le tableau de valeurs : $E[\|S_{10}\|] = 2,82$.

Simulation. L'algorithme qui simule une promenade de dix pas est facile à écrire. Voilà ce que j'ai obtenu pour quatre séries de cent promenades :

$$E[\|S_{10}\|] = 2,82 \quad 2,57 \quad 2,80 \quad 2,83.$$

J'ai relevé aussi les valeurs extrêmes de $\|S_{10}\|$: 0,16 et 7,21 ; 0,21 et 5,33 ; 0,23 et 5,92 ; 0,28 et 7,56.

Formulaire sur les fonctions de Bessel J_n

1) Par définition, $J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin t} e^{-int} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt$.

En particulier, $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$.

2) $J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^p}{4^p p!(p+n)!}$ pour tout réel x ; J_n a même parité que l'entier n .

3) $J_1 = -J_0'$: il suffit de dériver terme à terme la série donnant J_0 .

4) $xJ_0(x) + J_0'(x) + xJ_0''(x) = 0$ ou $\int_0^x tJ_0(t)dt = -x.J_0'(x)$: c'est aussi une conséquence de 2).

5) $J_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos(t - \pi/4 - n\pi/2) + O\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de $+\infty$, et donc $\lim_{\infty} J_n = 0$.

6) $\int_0^{+\infty} J_0$ existe, mais $\int_0^{+\infty} |J_0| = \int_0^{+\infty} J_0^2 = +\infty$.

7) Il existe $K_1 > 0$, $K_n > 0$, $L > 0$ tels que :

- $\left| J_0(t) - \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos(t - \pi/4) \right| \leq \frac{K_1}{t\sqrt{t}}$ et $\left| J_0(t)^n - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos(t - \pi/4) \right)^n \right| \leq \frac{K_n}{t(\sqrt{t})^n}$ sur $[1, +\infty[$;
- $\sqrt{t}|J_0(t)| \leq L$ sur $[0, +\infty[$.

8) J_0^n est intégrable à partir du rang 3.

- JEAN DIEUDONNÉ, *Calcul Infinitésimal*, Hermann 1980, Chapitre XV.
- LAURENT BERNIS ET JULIEN LE BAIL, *Étude en l'origine et en l'infini des solutions de l'équation de Bessel*, RMS 1 octobre 2008, 16 – 26.
