19 - PARTITIONS DÉNOMBRABLES D'UN CONNEXE EN FERMÉS

www.daniel-saada.eu

Un espace topologique connexe n'est jamais une réunion finie de fermés non vides disjoints, sauf si le cardinal de la réunion est 1. Le connexe $[0,1]$, ou un intervalle de $\mathbb{R}$, ou un connexe séparé infini non dénombrable, est la réunion de ses points, qui sont fermés, disjoints, en nombre non dénombrable. D'où la question légitime :

Un connexe peut-il être réunion infinie dénombrable d'une suite de fermés disjoints ?

(Une réunion, finie ou infinie, d'au moins deux ouverts disjoints ne peut être connexe.)
Nous donnons à la question posée d'abord deux réponses négatives, puis deux réponses positives.

1) Un connexe compact non réduit à un point n'est pas la réunion d'une suite de fermés disjoints (Théorème de Sierpinski)

Un espace topologique connexe K n'est pas la réunion d'une suite *finie* de fermés disjoints non vides $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (sauf si $n=1$) car il serait alors réunion des deux fermés disjoints F_1 et $\sum_2^n F_i$. Le théorème de Sierpinski affirme que si K est en outre compact, la réunion des fermés ne peut être de cardinal infini dénombrable $\aleph_0$. En d'autres termes, il n'existe pas de partition infinie dénombrable d'un connexe compact K en fermés : si $K = \sum_I F_i$, soit $\operatorname{card} I = 1$, soit $\operatorname{card} I > \aleph_0$; si $K = \sum_0^\infty K_n$, tous les K_n sont vides sauf un, qui vaut alors K.

DÉMONSTRATION

On raisonne par l'absurde en supposant que $K = \sum_0^\infty K_n$, avec K_n fermé dans K connexe et compact.

Étape 1 - Soit A fermé dans K : chaque composante connexe de A rencontre $Fr(A)$ (qui n'est pas vide).
Soit C une composante connexe de A ; comme A est compacte, C est l'intersection des fermés-ouverts F de A contenant C. Soit F est un tel fermé-ouvert, F et $A-F$ sont des fermés de K ; si F ne rencontre pas $Fr(A)$, alors

$$K = F + \left(A - F + adh(K-A)\right)$$

et K ne serait pas connexe puisque réunion disjointe de deux fermés non vides.
(La frontière d'une partie B d'un espace topologique E, notée $Fr(B)$, est l'adhérence de B moins son intérieur ou l'intersection des adhérences de B et $K-B$; dans un connexe, la frontière d'un vrai sous-ensemble n'est jamais vide, sinon $E = Int(B) + (E - adh(B))$.)

Étape 2 : il existe une suite décroissante de compacts non vides C_n telle que $C_n \cap K_n = \varnothing$ pour tout n.

a) *Construction du compact non vide $C = C_1$ disjoint de K_1.*

Comme les compacts K_1 et K_2 sont disjoints, il existe un ouvert U de K tel que $F = adh(U)$ contienne K_2 sans rencontrer K_1. Soit C une composante connexe de F qui rencontre K_2 : d'après l'étape 1, C rencontre la frontière de F, donc C ne peut être contenue dans K_2 qui est dans l'intérieur de F. Aussi a-t-on $C - K_2 \neq \varnothing$.

Mais $C - K_2 = C \cap (K - K_2) = \sum_3^\infty C \cap K_n$, donc il existe $n_1 \geq 3$ tel que $C \cap K_n \neq \varnothing$.

On pose $C_1 = C$.

b) *Construction de C_n*

On remplace K par C_1 : C_1 est connexe et compact tout comme l'était K, $C_1 = \sum_2^\infty C_1 \cap K_n$ avec au moins deux

intersections non vides pour $n=2$ et $n=n_1$. Comme C_1 est connexe, il existe une infinité d'intersections $C_1 \cap K_n$ non vides : on peut donc réécrire $C_1 = \sum_2^\infty C_1 \cap K_n$, avec chaque $C_1 \cap K_n$ non vide.
On construit C_2 compact et connexe non vide inclus dans C_1 tel que $C_2 \cap (C_1 \cap K_2) = \varnothing$: il en résulte que $C_2 \cap K_2 = \varnothing$. De proche en proche, on construit une suite décroissante de compacts connexes C_n tel que pour tout n, $C_n \cap K_n = \varnothing$.

Étape 3 : la contradiction.
L'intersection $\bigcap_n C_n$ est non vide et disjointe de chaque K_n, c'est absurde.

Conséquences. **1)** Si K compact est réunion dénombrable disjointe d'une suite de compacts connexes non vides C_n, chaque C_n est une composante connexe de K. En effet, soit K_n la composante connexe d'un $x \in C_n$; le compact connexe K_n se décompose en $\sum_p K_n \cap C_p$ et donc il existe p tel que $K_n = K_n \cap C_p$, p vaut n et alors $K_n \subset C_n$. Comme $C_n \subset K_n$, $C_n = K_n$.
2) La somme d'une suite de fermés d'un compact connexe ne peut être à la fois fermée et connexe.

2) Une autre condition d'impossibilité (Michel Wirth)

Un espace topologique connexe, localement connexe et dont les parties fermées vérifient la propriété de Baire (par exemple les espaces localement compacts ou les métriques complets) ne peut être somme d'une suite de fermés disjoints. $\mathbb{R}$ étant tout cela, commençons par lui.

a) Le cas de $\mathbb{R}$ (Denis Léger)

On suppose $\mathbb{R} = \sum F_n$; chaque $Fr(F_n)$ est non vide car $\mathbb{R}$ est connexe. La réunion $\sum Fr(F_n)$ est un fermé A de $\mathbb{R}$ car son complémentaire est la réunion des intérieurs des F_n. Le fermé non vide A possède la propriété de Baire (mon livre, **p 43**) : si A est une réunion dénombrable de fermés (relativement à A), l'un de ces fermés est d'intérieur non vide. Il ne reste plus, pour trouver une contradiction, qu'à montrer que chaque $Fr(F_n)$, qui est évidemment fermée dans A, est d'intérieur vide dans A.

Soit a un élément de $Fr(F_n)$: toute boule ouverte B de centre a rencontre le complémentaire de F_n, donc contient un b qui est dans un F_m avec $m \neq n$. Si le segment $[a,b]$ ne rencontrait pas la frontière de F_m, il serait la réunion des deux ouverts $[a,b] \cap (\mathbb{R} - F_m)$ et $[a,b] \cap Int(F_m)$, ce qui contredirait sa connexité. Il en résulte que $[a,b]$ rencontre la frontière de F_m, en un point c : comme c est dans $B \cap \mathrm{A}$, aucun voisinage ouvert de a dans A ne reste dans $Fr(F_n)$.

Complément. Dans $\mathbb{R}$, une réunion dénombrable de fermés disjoints n'est jamais connexe.

b) Le cas général

On suppose $E = \sum F_n$; la réunion $\sum Fr(F_n)$ est un fermé A, non vide, de E car son complémentaire est la réunion des intérieurs des F_n. Le fermé A possède la propriété de Baire par hypothèse. Il ne reste plus, pour trouver une contradiction, qu'à montrer que chaque $Fr(F_n)$, qui est évidemment fermée dans A, est d'intérieur vide dans A.
Soit a un élément de $Fr(F_n)$: a possède une base de voisinages connexes, chacun de ces voisinages $v(a)$ rencontre le complémentaire de F_n, donc contient un b qui est dans un F_m avec $m \neq n$.

Le connexe $v(a)$ rencontre $Fr(F_m)$: c'est évident si $b \in Fr(F_m)$, sinon $b \in Int(F_m)$ et si $v(a)$ ne rencontrait pas $Fr(F_m)$, il serait réunion de deux de ses ouverts non vides, à savoir $v(a) \cap (E - F_m)$ et $v(a) \cap \mathrm{int}(F_m)$. Il existe donc c dans $v(a) \cap Fr(F_m)$, donc aucun $v(a) \cap A$ ne reste inclus dans $Fr(F_n)$.

3) Exemples de connexes somme d'une suite de fermés disjoints

On commence par construire un espace connexe séparé dénombrable, lequel sera donc la réunion dénombrable de ses points, qui sont fermés. On donnera ensuite l'exemple d'un connexe E qui a la puissance du continu.

a) Un exemple d'espace topologique connexe séparé dénombrable (S.W. Golomb)

Le mathématicien S.W. Golomb a construit sur $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ une topologie $\mathfrak{T}$ qui en fait une espace connexe séparé ("A Connected Topology for the Integers", The American Mathematical Monthly, Vol. 66, No. 8, October, 1959).

Pour base de cette topologie, Golomb prend les sous-ensembles $U(a,r)$ de $\mathbb{N}^*$ définis par

$$U(a,r) = \{a + nr : n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}^*, a \wedge r = 1\}$$

où $a \wedge r$ est le PGCD de a et r.

Nous allons démontrer successivement que ces $U(a,r)$ définissent une topologie $\mathfrak{T}$, que pour cette topologie $\mathbb{N}^*$ est séparé puis connexe. La contrainte $a \wedge r = 1$ sera justifiée *in fine*.

(i) Construction de $\mathfrak{T}$

Les ouverts de $\mathfrak{T}$ sont les $U(a,r)$, leurs réunions quelconques $\bigcup_i U(a_i, r_i)$ avec $a_i \wedge r_i = 1$, et l'ensemble vide. Par construction, l'ensemble des ouverts est stable par réunion ; $\mathbb{N}^*$ est l'ouvert $U(1,1)$. On vérifie sans peine que $G \subset \mathbb{N}^*$ est ouvert si et seulement si pour tout entier g dans G il existe h premier avec g tel que $U(g,h) \subset G$.

Reste la stabilité des ouverts par intersection finie. Deux suffit. La formule ensembliste

$$\bigcup_i U(a_i, r_i) \cap \bigcup_j U(b_j, s_j) = \bigcup_{(i,j)} U(a_i, r_i) \cap U(b_j, s_j)$$

montre qu'il suffit d'établir qu'une intersection $U(a,r) \cap U(b,s)$ est ouverte.
Supposons $U(a,r) \cap U(b,s)$ non vide et soit $k \in U(a,r) \cap U(b,s)$: $k = a + nr = b + ms$ montrent que k est premier avec r et s, donc avec rs. Il est alors facile de vérifier que $U(k, rs) \subset U(a,r) \cap U(b,s)$, ce qui prouve le caractère ouvert de $U(a,r) \cap U(b,s)$.

En fait, $U(a,r) \cap U(b,s)$ non vide si et seulement si $r \wedge s$ divise $a - b$, et dans ce cas on montre que

$$U(a,r) \cap U(b,s) = U(k_0, r \vee s)$$

où $r \vee s$ est le PPCM de r et s et où k_0 est l'entier minimum de $U(a,r) \cap U(b,s)$.

(ii) $\mathbb{N}^*$ est séparé pour $\mathfrak{T}$

Soit $a > b$: si r premier avec a et b ne divise pas $a - b$, $U(a,r) \cap U(b,r) = \varnothing$.
Il suffit donc de prendre pour r un nombre premier $\geq a + b$.

(iii) $(\mathbb{N}^*, \mathfrak{T})$ est connexe (Christophe Chalons)

Soit F et G deux ouverts non vides et disjoints de $(\mathbb{N}^*, \mathfrak{T})$: F contient un ouvert de base $U(a,r)$ et G contient

un ouvert élémentaire $U(b,s)$.
Supposons $rs \in G$: comme G est ouvert, il existe t premier avec rs tel que $U(rs,t) \subset G$, t étant aussi premier avec r et avec s.
Comme r et t sont premiers entre eux, il existe deux entiers *relatifs* u et v tels que $rs - a = ur + vt$, et alors $a + ur = rs - vt$. Soit q assez grand pour que $qr > v$ et $qt > -u$. L'égalité

$$a + (u + qt)\mathrm{r} \ = \ \mathrm{rs} + (qr - v)t$$

prouve alors que $U(rs,t)$ rencontre $U(a,r)$, ce qui est absurde.
On en déduit que rs n'est donc pas dans G, mais un raisonnement analogue montrerait que rs n'est pas non plus dans F. Il en résulte que $\mathbb{N}^*$ ne peut être réunion de deux ouverts disjoints, donc $(\mathbb{N}^*, \mathfrak{T})$ est connexe.

Pourquoi impose-t-on à a et r d'être premiers entre eux ? Parce que $U(1,2)$ étant l'ouvert des entiers impairs, son complémentaire dans $\mathbb{N}^*$ est le fermé des pairs $U(2,2)$ et ne doit pas être ouvert.

b) Un connexe E qui a la puissance du continu et est la somme d'une suite de fermés disjoints (J.P. Carpentier)

Dans le plan, notons $S_{k,n}$ (pour n dans $\mathbb{N}^*$ et k impair dans $[0, 2^n]$) le segment constitué des complexes d'argument $k\pi / 2^n$ et de module compris entre $1/n$ et 1, et E la réunion des $S_{k,n}$ et du segment $[-1,1]$. Le caractère
impair de k et k' entraîne que les arguments $k\pi / 2^n$ et $k'\pi / 2^m$ sont distincts et donc que les $S_{k,n}$ sont disjoints.
On remarquera que si $[-1,1]$ est dans l'adhérence de $\sum S_{k,n}$, E n'est pas l'adhérence de $\sum S_{k,n}$.

Soient U et V deux ouverts disjoints de E qui recouvrent E. Celui qui contient l'origine, par exemple U, contient, pour n assez grand, un point de chaque $S_{k,n}$, et donc $S_{k,n}$ en entier puisque $S_{k,n}$ est connexe.
Il en résulte que U est dense dans E, donc l'ouvert V est vide et E est connexe, bien qu'il soit la réunion d'une suite de fermés disjoints.