14 - VARIABLES ALÉATOIRES À VALEURS DANS UN ESPACE MÉTRIQUE (*mise à jour*)

Soit X une application d'un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{T})$ dans un espace métrique (E,d) : X est dite mesurable si l'image réciproque par X de tout ouvert de E, ou de tout fermé, est dans la tribu $\mathcal{T}$. La fonction réciproque X^{-1} envoie donc la tribu $\mathcal{B}(E)$ des boréliens de E dans $\mathcal{T}$.

Nous dirons, avec beaucoup d'auteurs, qu'une application mesurable X est une *variable aléatoire* sur $(\Omega,\mathcal{T})$ si X est limite, sur tout l'univers Ω, d'une suite de fonctions étagées mesurables. C'est le cas de *toute* fonction mesurable quand $E=\mathbb{R}$; le Théorème qui suit, but de cet article, explique pourquoi :

Pour qu'une fonction mesurable X soit la limite simple d'une suite de fonctions étagées mesurables, il faut et il suffit que $X(\Omega)$ soit une partie séparable de E. Si de plus $X(\Omega)$ est précompacte, X est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées mesurables.

Il en résulte que si (E,d) est séparable, toute application mesurable est une variable aléatoire.

1) La mesurabilité

a) X est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_2$ dans E. Si X est mesurable, alors $X^{-1}(\lambda_i)$ est dans la tribu pour i allant de 1 à n car tout point de E est fermé. Cette condition nécessaire est également suffisante car pour tout A de E, et non pas seulement pour tout borélien de E, $X^{-1}(A)=\sum_{\lambda_i\in A}X^{-1}(\lambda_i)$ est dans la tribu comme réunion finie d'événements de la tribu.

b) *L'ensemble des applications mesurables est stable par limite simple* en vertu de la formule **11.6.3.1** de mon livre, page **178** : $X^{-1}(F)=\bigcap_n\bigcup_{p\geq n}X_p{}^{-1}(U_n)$, dans laquelle F est un fermé de E, $U_n=\{x\in E: d(x,F)<1/n\}$, X la limite simple d'une suite d'applications X_p. Si chaque X_p est mesurable, $X_p{}^{-1}(U_n)$ est dans la tribu pour tous p et n, et il en de même de la réunion dénombrable $\bigcup_{p\geq n}X_p{}^{-1}(U_n)$ et de l'intersection dénombrable $\bigcap_n\left(\bigcup_{p\geq n}X_p{}^{-1}(U_n)\right)$.
En particulier, une limite de fonctions étagées mesurables est mesurable.

c) X mesurable implique que toutes les fonctions numériques $\omega\to d(a,X(\omega))$ sont mesurables, puisque $X^{-1}(B(a,r))=\{\omega: d(a,X(\omega)<r\}$.

d) La définition de X mesurable – $X^{-1}(U)$ est dans la tribu quand U est ouvert – est un truisme quand $U\cap X(\Omega)$ est vide puisqu'alors $X^{-1}(U)$ est vide. Puisque $X^{-1}(U)=X^{-1}(U\cap X(\Omega))$, mesurable veut dire que $X^{-1}(\text{tout ouvert de X}(\Omega))$ est dans la tribu.

2) Espaces métriques séparables

Un espace métrique (E,d) est dit *séparable* s'il contient une suite partout dense ou une partie dénombrable D dont l'adhérence est E : $\overline{D}=E$. Si $D=\{a_n\}$, tout x de E est donc limite d'une sous-suite des a_n, autrement dit pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier p tel que $d(x,a_p)<\varepsilon$.

Les ensembles $\mathbb{R}^n$ sont séparables puisqu'on peut prendre $D=\mathbb{Q}^n$; il est bien connu que tout métrique compact est séparable.

Soit (E,d) un espace métrique séparable :

a) *E est à base dénombrable d'ouverts*
Cette expression signifie qu'il existe une famille dénombrable d'ouverts (U_n) telle que tout ouvert U de E soit réunion d'une sous-famille des U_n. La famille des boules ouvertes $B(a_n,\rho)$ de centre a_n et de rayon ρ *rationnel* >0 est une base dénombrable d'ouverts. Pour ce faire, on montre que pour tout x dans U existent n et ρ tels que $x\in B(a_n,\rho)\subset U$. Comme U est ouvert, il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\subset U$; il existe par ailleurs un entier n tel que $d(x,a_n)<r/2$, d'où $x\in B(a_n,r/2)\subset B(x,r)$. Si ρ est un rationnel vérifiant $d(a_n,x)<\rho\le r/2$, alors

$$x\in B(a_n,\rho)\subset B(a_n,r/2).$$

On en déduit $x\in B(a_n,\rho)\subset B(a_n,r/2)\subset B(x,r)\subset U$: U est donc une réunion de $B(a_n,\rho)$, famille dénombrable, ce qu'il fallait démontrer.

Pour toute base dénombrable d'ouverts (U_n), $E=\bigcup U_n$: en effet, E est la réunion d'une sous-famille des (U_n), $E=\bigcup U_{n_i}$, mais $\bigcup U_{n_i}\subset\bigcup U_n$.

Puisque les ouverts de E se confondent avec toutes les réunions, finies ou infinies, des U_n, il vient que le cardinal de l'ensemble des ouverts de E est $\le\aleph_1$ puisque cet ensemble est isomorphe à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

b) *Toute partie F non vide de E est elle-même séparable, c'est-à-dire contient une suite dense dans F*

Comme $E=\bigcup U_n$, $F=\bigcup(F\cap U_n)$; soit b_n un élément de $F\cap U_n$ (quand $F\cap U_n$ n'est pas vide) : prouvons que la famille (b_n) est dense dans F. Soit x dans F et $\varepsilon>0$:
$B(x,\varepsilon)=\bigcup U_{n_i}$ et donc $F\cap B(x,\varepsilon)=\bigcup(F\cap U_{n_i})$; comme $F\cap B(x,\varepsilon)$ n'est pas vide, l'un des $F\cap U_{n_i}$ n'est pas vide, et alors $b_{n_i}\in F\cap U_{n_i}\subset F\cap B(x,\varepsilon)$ et donc $b_{n_i}\in B(x,\varepsilon)$, cqfd.

À partir d'une suite dense, on peut donc en construire une infinité, n'est-ce pas un sujet d'étonnement ?

c) *E a au plus la puissance du continu*
L'application $x\to\left(d(x,a_n)\right)$ est une injection de E dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: en effet, si $d(x,a_n)=d(y,a_n)$ pour tout n, alors l'égalité a lieu pour la sous-suite a_{n_i} de limite x ; en passant à la limite, on obtient $0=d(y,x)$. Comme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a la puissance du continu, E a plus la puissance du continu.

Deuxième démonstration : l'ensemble des ouverts de E ayant au plus la puissance du continu, il en est de même des fermés, et donc *a fortiori* des points de E.

$[0,1]^{\mathbb{R}}$, ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, n'est séparable pour aucune distance (par exemple $d(f,g)=\sup\limits_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|$) car la cardinal de $[0,1]^{\mathbb{R}}$ est strictement plus grand que celui de $\mathbb{R}$.

d) *De tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement dénombrable*

Soit $\bigcup_I V_i$ une réunion quelconque d'ouverts : on va montrer qu'il existe une partie *dénombrable* J de I telle que $\bigcup_I V_i = \bigcup_J V_j$. Chaque V_i est une réunion dénombrable de la base : $V_i = \bigcup_{k\in A_i} U_k$, où $A_i \subset \mathbb{N}$.

Soit A la réunion des A_i : $A = \bigcup_I A_i$; A est dénombrable, soit $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ la suite de ses éléments. Il existe une suite d'indices de I telle que $a_1 \in A_{i_1}, a_2 \in A_{i_2}, ..., a_n \in A_{i_n}, ...$ et donc $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i_n}$; comme $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i_n} \subset A$, alors $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i_n}$. Donc $\bigcup_I V_i = \bigcup_A U_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{i_n}$ si on pose $V_{i_n} = \bigcup_{A_{i_n}} U_k$; J est l'ensemble des i_n.

La démonstration de ce résultat, du au mathématicien finlandais Ernst Lindelöf (1870-1946), est donc purement ensembliste : une réunion quelconque de parties de $\mathbb{N}$ est en fait une réunion dénombrable.

On retrouve que tout ouvert est une réunion dénombrable de boules ouvertes : en effet, tout ouvert U est la réunion des boules ouvertes $B(x,r)$ quand x décrit U. Ce résultat était déjà connu en **a)** puisque les boules $B(a_n,\rho)$ constituaient une base dénombrable d'ouverts. Voici maintenant une formule explicite : $U = \bigcup_n B(u_n, r_n)$, où (u_n) est une suite dense de U contenue dans U et $r_n = d(u_n, E-U)$.

e) *Un critère de mesurabilité*

Si E est séparable, pour que X soit mesurable, il suffira que l'image réciproque par X d'une boule ouverte soit dans $\mathcal{T}$, $\{\omega : d(a, X(\omega)) < r\} \in \mathcal{T}$, car tout ouvert est une réunion dénombrable de boules ouvertes. X mesurable équivaut alors à $\omega \to d(X(\omega), a)$ mesurable en tant qu'application de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (sous-entendu pour tout a de E).

Complément. Tout espace métrique séparable est homéomorphe à une partie du cube de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$: c'est le Théorème de plongement d'Urysohn (Pavel , russe, 1898-1924) que l'on trouvera sur

http://www.daniel-saada.eu/Le_Theoreme_d_Urysohn.pdf

3) Espaces précompacts

Un espace métrique E est dit *précompact* si $\forall \varepsilon > 0$ on peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε, ou de rayon $\leq \varepsilon$. Un compact est évidemment précompact. Tout intervalle borné J de $\mathbb{R}$ est précompact : si a et b sont les extrémités de J, $a < b$, J est inclus dans la réunion $\bigcup_{k=1}^{n-1} B(a + k(b-a)/n, (b-a)/n)$, où n est choisi tel que $(b-a)/n < \varepsilon$.

Un espace précompact est séparable. Soit F_n l'ensemble fini des centres des boules de rayon $1/n$ dont la réunion est E : $\bigcup_n F_n$ est une partie dénombrable dense de E.

On notera l'analogie entre précompacts et séparables : si (E,d) est précompact, il existe une partie finie F de E telle que $\{x : d(x,F) < \varepsilon\} = E$; quand (E,d) est séparable, il existe une partie dénombrable D telle que $\{x : d(x,D) < \varepsilon\} = E$.

Un précompact est borné. Si $E=\bigcup_1^n B(x_i,\varepsilon)$, $d(u,v)\le 2\varepsilon+\max_{i,j} d(x_i,x_j)$. *La réciproque fausse* : soit B la boule unité fermée d'un espace de Banach V de dimension infinie ; B est complète, si B était précompacte, elle serait compacte (mon livre, **2.3.4**, page **65**) et V serait de dimension finie (Théorème de Riesz).

Toute partie A d'un précompact E est précompacte, ce qui veut dire que A est une réunion finie de $A\cap B(y_i,\varepsilon)$ avec y_i dans A. Soit $\varepsilon>0$: E est la réunion des boules $B(x_i,\varepsilon)$, et donc $A=\bigcup(A\cap B(x_i,\varepsilon))$; il a 3 cas :

- si $A\cap B(x_i,\varepsilon)$ est vide, on rejette cette boule, c'est-à-dire qu'on élimine i de la liste des indices ;
- si $x_i\in A$, on garde la boule et on pose $y_i=x_i$;
- soit y_i dans $A\cap B(x_i,\varepsilon)$ supposé non vide ; alors $A\cap B(x_i,\varepsilon)\subset A\cap B(y_i,2\varepsilon)$.

Donc A est une réunion finie de $A\cap B(y_i,2\varepsilon)$ avec y_i dans A, ce qui achève la démonstration.

On en déduit que tout borné de $\mathbb{R}$ est précompact puisque tout borné est contenu dans un intervalle borné.

La démonstration précédente prouve qu'une partie A d'un espace métrique (E,d) est précompacte si, et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $y_1,y_2,\dots,y_n$ dans E tels que $A\subset\bigcup_1^n B(y_i,\varepsilon)$.

Aussi, pour fabriquer un précompact B, on peut opérer comme suit : $B=\bigcap_{n\ge1}\bigcup_{i=0}^{i_n} A_{n,i}$, où $A_{n,i}$ est une boule de rayon $1/n$ quand i varie de 0 à i_n (et en espérant que B ne soit pas vide !).

4) Démonstration du Théorème annoncé

a) *On suppose que X est limite d'une suite (h_n) de fonctions étagées sur $\mathcal{T}$*

Puisque $X(\omega)$ est la limite dans E de la suite $h_n(\omega)$, l'adhérence de $D=\bigcup_n h_n(\Omega)$ contient $X(\Omega)$: $X(\Omega)\subset\overline{D}$.
Comme D est dénombrable, $\overline{D}$ est une partie séparable de E. Il en résulte que $X(\Omega)$, sous-ensemble de $\overline{D}$, contient également une suite dense : $X(\Omega)$ est séparable et son cardinal inférieur ou égal à celui de $\mathbb{R}$.
On remarquera que le caractère mesurable des h_n n'a pas servi, et qu'il aurait suffi que $h_n(\Omega)$ soit infini dénombrable.

b) *On suppose que $X(\Omega)$ contient une suite $(a_n)_{n\ge1}$ dense*

Posons $D=\{a_n\}_{n\ge1}$ et soit $D_n=\{a_1,\dots,a_n\}$. Pour n fixé, soit C_i l'ensemble des ω tels que $d(X(\omega),D_n)$ est atteint en a_i : $\Omega=\bigcup_1^n C_i$. On sait alors que $\Omega=C_1+(C_2-C_1)+\dots+(C_n-\bigcup_1^{n-1}C_i)$. A l'aide de cette partition, on définit sans ambiguïté $h_n(\omega)$ par $h_n(\omega)=a_i$ quand $\omega\in C_i-\bigcup_1^{i-1}C_j$: $h_n=a_i$ sur $C_i-\bigcup_1^{i-1}C_j$.
Comme $d\left(X(\omega),h_n(\omega)\right)\le d(X(\omega),a_1),d(X(\omega),a_2),\dots,d(X(\omega),a_n)$ pour tout ω, $h_n\to X$ sur Ω puisque $d\left(X(\omega),D\right)=0$. X est donc la limite simple de la suite des fonctions étagées h_n.
Reste à prouver que chaque h_n est mesurable, donc que chaque C_i est dans la tribu $\mathcal{T}$. Or l'événement C_i est l'intersection des n-1 événements $d(X(\omega),a_i)\le d(X(\omega),a_j)$, et chacun de ces événements est dans $\mathcal{T}$ car X mesurable implique $\omega\to d(X(\omega),a)$ mesurable pour tout a de E comme on l'a dit en **1c)**.

On remarquera que, pour tout n, $h_n(\Omega)\subset X(\Omega)$.

c) *On suppose $X(\Omega)$ précompacte*

Par hypothèse, $X(\Omega)=\bigcup_{i=1}^{n}(X(\Omega)\cap B(y_i,\varepsilon))$, avec $y_i \in X(\Omega)$. Pour i allant de 1 à n, soit

$$A_i=\{\omega\in\Omega : d(f(x),y_i)<\varepsilon\}.$$

$\Omega=\bigcup_1^n A_i$ et chaque A_i est dans la tribu $\mathcal{T}$ car $A_i=X^{-1}(B(y_i,\varepsilon))$. On pose $B_1=A_1$, $B_2=A_1-A_2$, ..., et $B_n=A_n-\bigcup_1^{n-1}A_i$: les B_i forment une partition de Ω. Soit h_ε la fonction étagée mesurable définie par $h_\varepsilon(B_i)=y_i$. Si $\omega\in\Omega$, ω est dans un des B_i et $d(h_\varepsilon(\omega),X(\omega))=d(y_i,X(\omega))<\varepsilon$ par construction de h_ε : la suite des fonctions $h_{1/n}$ converge donc *uniformément* vers X sur tout Ω.

Ainsi s'explique qu'une variable aléatoire réelle bornée soit limite uniforme d'une suite de fonctions étagées (un borné de $\mathbb{R}$ est précompact). Cette démonstration extrêmement simple donne là aussi $h_\varepsilon(\Omega)\subset X(\Omega)$.

Réciproque. Si X est limite *uniforme* d'une suite (h_n) de fonctions étagées, $X(\Omega)$ est une partie précompacte de (E,d). En effet, pour tout $\varepsilon>0$, il existe n tel que $d(h_n(\omega),X(\omega))<\varepsilon$ pour tout ω de Ω ; si $y_1,y_2,...,y_k$ désignent les valeurs en nombre fini prises par h_n, $X(\Omega)\subset\bigcup_1^k B(y_i,\varepsilon)$, ce qui prouve que $X(\Omega)$ est précompact.

****