08 - SUR LES SOMMES DE RIEMANN D'UNE FONCTION CONTINUE

On sait que si f est une fonction numérique continue sur $[a,b]$, la suite $R_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ converge vers l'intégrale $I(f)=\int_a^b f$. Si f est monotone sur $[a,b]$, $|I(f)-R_n(f)|\le K/n$, $K=|f(b)-f(a)|$; il en est de même si f est *K*-lipchitzienne (remarquer que $R_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+k(b-a)/n}^{a+(k+1)(b-a)/n} f(a+k(b-a)/n)dx$).

Il ne peut en être ainsi pour toutes les fonctions continues, autrement dit l'hypothèse

$$\forall f \quad \exists K \quad \forall n\ge 1 \quad |I(f)-R_n(f)|\le K/n$$

est fausse.

Dans toute la suite, on supposera $a=0$ et $b=1$, au lecteur de faire les adaptations nécessaires. On a donc $R_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$ et $I(f)=\int_0^1 f$.

INEXISTENCE THÉORIQUE D'UNE CONSTANTE UNIVERSELLE K

Appelons E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; muni de la norme $\|f\|=\max\{f(x):x\in[0,1]\}$, E est complet. Soit L_n la forme linéaire définie sur E par

$$L_n(f)=n\int_0^1 f-\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)=n\big(I(f)-R_n(f)\big).$$

L'inégalité $|L_n(f)|\le n\int_0^1|f|+\sum_{k=0}^{n-1}|f(k/n)|$ montre que L_n est continue sur l'espace normé E et que $\|L_n\|\le 2n$ (en fait $\|L_n\|=2n$).

Pour $f_n(x)=\sin^2(\pi nx)$, il vient $\|f_n\|=1$, $\int_0^1 f_n=1/2$ et $L_n(f)=-n/2$: il en résulte que $\|L_n\|\to+\infty$ et qu'en vertu du Théorème de Banach-Steinhaus, il ne peut exister de constante *K* telle que $|L_n(f)|\le K$ pour *tout* n et *toute* f. Il existe donc une fonction continue f pour laquelle la suite $n|I(f)-R_n(f)|$ n'est pas bornée. L'ensemble de ces fonctions est, comme nous allons le voir, *dense* dans *E* ; il se peut même que $n|I(f)-R_n(f)|$ tende vers l'infini !

DÉMONSTRATION

1) *On suppose que pour toute f de E existe K tel que $|L_n(f)|\le K$ pour tout n*

Comme chaque L_n est continue, $\{f\in E:|L_n(f)|\le N\}$ est fermé pour tous n et N, et donc est aussi fermée pour tout *N* l'intersection $F_N=\{f:|L_n(f)|\le N \ pour\ tout\ n\ge 1\}$. Par hypothèse, $E=\bigcup_{N=1}^{\infty}F_N$. E étant complet, il existe un entier N_0 tel que F_{N_0} contienne un boule fermée de centre f_0 et de rayon $r>0$:

$$\|f-f_0\|\le r \text{ implique } |L_n(f)|\le N_0 \text{ pour tout n.}$$

Les L_n sont alors uniformément bornées sur la boule fermée de centre 0 et de rayon r :

$\|f\|\le r$ implique $f+f_0\in B(f_0,r)$ et donc $|L_n(f+f_0)|\le N_0$; comme $L_n(f)=L_n(f+f_0)-L_n(f_0)$, $|L_n(f)|\le|L_n(f+f_0)|+|L_n(f_0)|\le 2N_0$, ceci pour tout n. Il en résulte que les $\|L_n\|$ sont majorées par $2N_0/r$.

2) *On suppose que* $\| L_n \| \to +\infty$

Dans ce cas, aucun des F_N n'est d'intérieur vide, et comme E est métrique complet, il en est de même de $\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$ .Cette réunion est exactement l'ensemble des fonctions f telle que la suite des réels $|L_n(f)|$ est bornée. Le complémentaire de cette réunion est une partie *dense* de E. Pour chaque f de cette partie dense, la suite $n\left|I(f)-R_n(f)\right|$ n'est pas bornée.

UN EXEMPLE EFFECTIF (Pierre Delezoide)

Soit $f(x)=\sum_1^{\infty} a_n \cos(2\pi b_n x)$, où a_n est le terme général d'une série absolument convergente et b_n une suite d'entiers ≥ 1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de période 1 ; f est continue et $I(f)=0$ car les sommes partielles de la série convergent uniformément vers f. Aussi, $n\left(I(f)-R_n(f)\right)=n.R_n(f)$.

On a d'une part $N.R_N(f)=\sum_{k=0}^{N-1} f(k/N)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi b_n k/N)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{N-1}\cos(2\pi b_n k/N)$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^{N-1}\cos(2\pi b_n k/N)$ vaut soit 0 si l'entier *N* ne divise pas b_n, soit *N* si b_n est un multiple de n, c'est une conséquence de l'identité $(1-e^{ix})(1+e^{ix}+\ldots+e^{i(N-1)x})=1-e^{iNx}$ et du caractère entier des b_n. Donc,

la somme de Riemann $R_N(f)$ *est la somme des* a_j *pour j tel que* b_j *est multiple de N.*

Si $b_n=n!$ et que tous les a_n sont ≥ 0, $R_N(f)$ est plus grand que $\sum_N^{\infty} a_j$; il est maintenant facile de trouver des exemples où $N.R_N(f)$ tend vers l'infini : $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ par exemple, car $\sum_N^{\infty} a_j$ est équivalente à $\dfrac{2}{\sqrt{N}}$.

COMPLÉMENT : *cas des fonctions périodiques indéfiniment dérivables*

Les sommes de Riemann approchent remarquablement bien en revanche l'intégrale $\int_0^T f$ quand f est de période T et de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. Ce résultat a été demandé aux Oraux des Grandes Écoles en 2008. Voici ma solution.