UN ESPACE NORMÉ HOMÉOMORPHE À UN BANACH EST COMPLET

www.daniel-saada.eu

Un espace normé non complet peut-il être homéomorphe à un espace normé complet ? La réponse est non. Dans toute cette note, f désigne une homéomorphie (application bicontinue) d'un espace normé (E,d) sur un espace normé (F,δ) *complet*. Merci à André Martino d'avoir posé cette intéressante question (et effectué quelques corrections) et à Paul Barbaroux qui a déniché **[1]**.

Lemme 1 : Soit (E,d) métrique et (F,δ) métrique *complet*, non nécessairement normés, A une partie de E et f une application continue de A dans F : alors f se prolonge continûment sur un G_δ de E contenant A et contenu dans l'adhérence $\overline{A}$ de A.

Démonstration ([2], page 60).
Pour x appartenant à $\overline{A}$, on définit l'oscillation de f en x :

$$\omega(x) = \lim_{r \to 0^+} diam\, f(B(x,r) \cap A)\text{, limite qui existe dans } [0,+\infty].$$

La fonction ω est semi-continue supérieurement et est nulle sur A car f est continue en tout point de A.
Soit $G = \{x \in \overline{A} : \omega(x) = 0\}$: G est un G_δ de $\overline{A}$ contenant A car $G = \bigcap_n \{x \in \overline{A} : \omega(x) < 1/n\}$.

Comme le fermé $\overline{A}$ est un G_δ de l'espace métrique E, G est un G_δ de E.
Pour $x \in G$, on pose $g(x) = \lim\{f(a) : a \in A \text{ et } a \to x\}$.

a) La fonction g est définie sur G

On va utiliser des suites. On montre d'abord que si $a_n \to x \in G$, $f(a_n)$ a une limite finie, puis que cette limite ne dépend pas de la suite qui tend vers x.

Puisque $\omega(x) = 0$, il existe $r > 0$ tel que $diam\, f(B(x,r) \cap A) < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fixé.
A partir d'un rang N, $a_n \in B(x,r)$, d'où $\delta(f(a_p), f(a_q)) < \varepsilon$ et ceci pour p et q $\geq N$: $f(a_n)$ est donc une suite de Cauchy de F, comme F est complet elle converge dans F.

Si maintenant $b_n \to x$, à partir d'un rang N', a_n et $b_n \in B(x,r)$, d'où $\delta(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$ et ceci pour p et q $\geq N'$, donc $f(b_n)$ a même limite que $f(a_n)$, ce qui prouve que $g(x) = \lim\{f(a) : a \in A \text{ et } a \to x\}$ existe sur G.

b) g est continue sur G

On se donne une suite x_n dans G qui converge vers x de G. On veut prouver que $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe N au delà duquel $\delta(g(x_n), g(x)) < \varepsilon$.
Par définition de g, il existe $r > 0$ tel que $\delta(f(a), g(x)) < \varepsilon / 2$ pour tout $a \in B(x,r) \cap a$.
Ensuite, il existe N au delà duquel $d(x, x_n) < r$.
Soit $n > N$: il existe $r_n > 0$ tel qu'on ait à la fois

$$B(x_n, r_n) \subset B(x,r) \text{ et } \delta(f(a), g(x_n)) < \varepsilon / 2 \text{ pour } a \in B(x_n, r_n) \cap A.$$

On en déduit $\delta(g(x), g(x_n)) < \varepsilon$; ceci est vrai pour tout $n > N$, d'où la continuité recherchée.

c) $g = f$ sur A : c'est évident car f continue en tout a de A.

Conséquence. Considérons l'espace normé E comme une partie A de son complété[1] E' et soit toujours f l'homéomorphie de A sur le Banach F : f se prolonge en g continu sur un G_δ A' de E', avec $A \subset A' \subset \overline{A}$

Soit $x' \in A'$: x' est alors limite d'une suite (x_n) d'éléments de A et par continuité il vient :

$$f^{-1} \circ g(x') = \lim_n f^{-1} \circ g(x_n) = \lim_n f^{-1} \circ f(x_n) = \lim_n x_n = x'$$

et donc $x' \in A$. Ainsi $A' = A$, **et** $A = F$ **est un** G_δ **de son complété** E'.

Lemme 2 : Si un sous-espace F d'un Banach B est un G_δ, F est fermé.

Démonstration ([1], exercice 1.78, pages 47 et 48).

a) On peut toujours supposer F dense car l'adhérence de F est un Banach : on aura alors $F = \overline{F}$, donc F sera fermé dans B.

b) Puisque $F = \bigcap_n U_n$, avec U_n ouvert et dense car $F \subset U_n$, $B - F = \bigcup_n (B - U_n)$ est donc maigre.

c) Si $F \neq B$, il existe $a \in B - F$ et $a + F$ est alors inclus dans le maigre $B - F$: donc $a + F$ est maigre et il en est de même de F par translation. Alors $B = F + (B - F)$ serait un maigre, c'est impossible car E est complet. On en déduit $F = B$.

Conclusion. F est égal à son complété F' et F est donc complet.

Remarque. La proposition ne s'étend pas aux espaces métriques : R est homéomorphe à $]-1,1[$ qui n'est pas complet (pour la distance usuelle).

Bibliographie

[1] *Banach Space Theory - The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, consultable sur : http://books.google.fr/books?id=5BDX2NNsqR4C&printsec=frontcover&dq=Banach+Space+Theory:+The+Basis+for+Li-near+and+Nonlinear+Analysis&hl=fr&sa=X&ei=ceq9UJPhCsqG0QGe4oHADQ&ved=0CDMQ6AEwAA#v=onepage&q=Banach%20Space%20Theory%3A%20The%20Basis%20for%20Linear%20and%20Nonlinear%20Analysis&f=false

[2] *Outils topologiques et métriques de l'Analyse mathématique*, G. Choquet, CDU.

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_complet#Compl.C3.A9t.C3.A9_d.27un_espace_m.C3.A9trique