UN EXERCICE DE BOURBAKI

www.daniel-saada.eu

Soit f une fonction vectorielle continue, définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé (E,N) et admettant en tout point x de I une dérivée à droite et une dérivée à gauche :

$$\lim_{h\to 0^+} N\left(x \to \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'_d(x)\right) = 0 \text{ et } \lim_{h\to 0^-} N\left(x \to \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'_g(x)\right) = 0.$$

Montrer que l'ensemble des $x \in I$ tels que $f'_d(x) \neq f'_g(x)$ est *dénombrable*.

(BOURBAKI, FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE, chap. 1, exercice 4.)

a) *Pour tout ouvert U de E, l'ensemble $\left\{x \in I : f'_d(x) \in U \text{ et} f'_g(x) \notin \overline{U}\right\}$ est dénombrable.*

Fixons U et posons $A = \{x \in I : f'_d(x) \in U\}$; introduisons, pour $\alpha > 0$

$$B_\alpha = \left\{x : \exists\, y \in]x-\alpha, x[\text{ tel que } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \in U\right\}.$$

Si $f'_g(x) \notin \overline{U}$, il existe par continuité de f un entier n tel que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \notin U$ pour y dans $]x-1/n, x[$: alors,

$\left\{x : f'_d(x) \in U \text{ et} f'_g(x) \notin \overline{U}\right\} = \bigcup_n (A - B_{1/n})$.

Il suffit de montrer que $A - B_\alpha$ est dénombrable pour tout $\alpha > 0$. Pour tout x dans A, il existe $h > 0$ tel que $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \in U$ si $z \in [x, x+h[$. Comme on peut supposer $h \leq \alpha$, tout z de $]x, x+h[$ est dans B_α, x jouant le rôle de y. Il en résulte que si x est dans $A - B_\alpha$, $(A - B_\alpha) \cap]x, x+h[= \varnothing$ et on utilise le

Lemme. Soit E une partie de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in E \quad \exists h > 0 \quad]x, x+h[\cap E = \varnothing$: E est *dénombrable*.

Preuve. Pour x dans E, on pose $h_x = \sup\{h > 0 :]x, x+h[\cap E = \varnothing\}$ (h_x peut éventuellement être infini)

Pour tout réel T, l'ensemble $E_n = \{x \in [-T, T] : h_x \geq 1/n\}$ est évidemment fini (de cardinal $\leq 2nT$)

La réunion des E_n est $E \cap [-T, T]$, qui est donc dénombrable ; comme $E = \bigcup_n E \cap [-N, N]$, avec N entier, E est bien dénombrable.

b) f est dérivable en dehors d'un ensemble au plus dénombrable

Comme I est séparable, f continue et E normé, $f(I)$ est un métrique séparable ; il en de même du sous-espace vectoriel engendré par $f(I)$ qui contient les vecteurs $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ et de son adhérence F qui contient $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ pour tout x. Soit (U_n) une base dénombrable d'ouverts de F.

Si $f'_d(x) \neq f'_g(x)$, il existe deux indices p et q tels que $f'_d(x) \in U_p$, $f'_g(x) \in U_q$ et $U_p \cap U_q = \varnothing$. Comme U_p et U_q disjoints, $f'_g(x) \notin \overline{U_p}$ ($U \cap V = \varnothing$ implique $U \cap \overline{V} = \varnothing$). Réciproquement, si $f'_g(x) \notin \overline{U_p}$, $f'_g(x)$ appartient au complémentaire de $\overline{U_p}$ qui est un ouvert réunion d'une partie des U_n et donc il existe q tel que $f'_g(x) \in U_q$.

En conséquence,

$$\{x : f'_d(x) \neq f'_g(x)\} = \bigcup_p \{x : f'_d(x) \in U_p \text{ et } f'_g(x) \notin \overline{U_p}\}$$

est une réunion dénombrable de dénombrables et donc est dénombrable.

c) Le résultat tombe en défaut si l'espace d'arrivée E n'est pas muni d'une norme

Prenons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et soit f de $\mathbb{R}$ dans E définie par $x \to f(x)$, où $f(x)$ est l'application $t \to |x-t|$.

Pour tout réel x, (les fonctions) $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ existent *pour la convergence simple* :

$$f'_d(x) = -1 \text{ sur }]x,+\infty[, +1 \text{ sur }]-\infty, x] \quad \text{et} \quad f'_g(x) = -1 \text{ sur } [x,+\infty[, +1 \text{ sur }]-\infty, x[.$$

(Dans le calcul de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|x-t+h|-|x-t|}{h}$, distinguer $t = x$ de $t \neq x$.)

On a donc $f'_d(x) \neq f'_g(x)$ *partout* et f dérivable *nulle part*.

On en déduit qu'il ne peut exister de norme N sur E pour laquelle

$$\lim_{h \to 0^+} N\left(x \to \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'_d(x)\right) = 0 \text{ et } \lim_{h \to 0^-} N\left(x \to \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'_g(x)\right) = 0 .$$

Montrons plus (Alain Rémondière)

(i) il n'existe aucune norme N sur E telle que si $h_n \to h$ simplement, alors $N(h_n - h) \to 0$ (pour toute suite h_n)

(ii) il n'existe aucune norme N sur E telle que $N(h_n - h) \to 0$ implique $h_n \to h$ simplement pour toute suite h_n .

.

Preuve de **(i)**. Soit $A = (a_n)$ une partie infinie dénombrable de $\mathbb{R}$ et g_n la fonction qui vaut 1 en a_n et 0 ailleurs : la suite $h_n = \dfrac{g_n}{N(g_n)}$ tend simplement vers la fonction nulle et $N(h_n) = 1$.

Preuve de **(ii)**. On suppose qu'il existe norme N sur E pour laquelle $N(h_n - h) \to 0$ implique $h_n \to h$ simplement, pour toute suite h_n . Pour tout réel x, la forme linéaire $f \to f(x)$ est alors *continue* sur E . Il existe donc un réel positif, noté $g(x)$, tel que $|f(x)| \leq g(x).N(f)$ pour toute f de E . Choississons $f = g^2$: il vient $g(x) \leq N(g^2)$, ce qui prouverait que toutes les fonctions de E sont bornées. C'est absurde car $\mathbb{R}$ est *infini*.