CONNEXITÉ

www.daniel-saada.eu

Notations. $E = F + G$ signifie que l'ensemble E est la réunion des parties disjointes F et G ; on dit aussi que E est somme de F et G. Lorsque E est un espace topologique, l'adhérence d'une partie A sera notée $adh(A)$, son intérieur $Int(A)$, sa frontière $Fr(A)$, laquelle est l'adhérence de A moins son intérieur ou encore l'intersection des adhérences de A et $E - A$. Les parties de frontière vide sont exactement les parties à la fois ouvertes et fermées, on dira les fermés-ouverts, parce que $Int(A) \subset A \subset adh(A)$.

Un espace topologique est dit connexe si ses seuls fermés-ouverts sont l'ensemble vide et l'espace tout entier.
Dans un espace connexe et séparé E non réduit à un point, tout élément x de E est adhérent à $E - \{x\}$.
Quand E est connexe, la frontière d'un vrai sous-ensemble A n'est jamais vide, sinon E ne serait pas connexe puisque $E = Int(A) + (E - adh(A))$.
$\mathbb{R}$ est connexe et ses sous-espaces connexes sont les intervalles.
Un espace topologique réduit à un point est connexe, un singleton d'un espace topologique est une partie connexe.
Quand l'espace est séparé, ses singletons sont en outre fermés : un espace connexe et séparé non réduit à un point est de cardinal infini. Il existe des connexes séparés qui sont infinis dénombrables, voir ici, paragraphe **3) a**.

Un espace non connexe E est la somme de deux ouverts disjoints et non vides, ces ouverts étant aussi fermés.
Un sous-espace A n'est pas connexe quand existent deux ouverts U et V de E tels que

$$A = A \cap U + A \cap V \text{ et } A \cap U \cap V = \varnothing \quad \text{(il suffira que } U \cap V = \varnothing \text{)}.$$

$\mathbb{Q}$ n'est pas un sous-espace connexe de $\mathbb{R}$ car $\mathbb{Q} =]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} +]\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$; il en est de même de toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$.
Une réunion disjointe de deux ouverts, ou de deux fermés, non vides est non connexe par construction.
Plus généralement, une somme finie de fermés, une somme quelconque d'ouverts, ne sont pas connexes.

Une réunion quelconque de parties connexes d'intersection non vide est connexe.
La réunion d'une famille de droites concourantes est donc connexe (et même connexe par arcs).

L'adhérence d'une partie connexe est connexe.
La réciproque est fausse : $\mathbb{R}$ est connexe, $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

La composante connexe d'un point x est la réunion des parties connexes qui contiennent x, lui-même connexe.
La composante connexe de x est le plus grand connexe contenant x, elle est fermée et se note $C(x)$.
Toute partie connexe C d'un espace est contenue dans une des composantes connexes $C(x)$ de l'espace car si $x \in C$ alors $C \subset C(x)$.
Si $y \in C(x)$, alors $C(y) = C(x)$: les composantes connexes distinctes forment donc une partition de l'espace en fermés. Quand le nombre de composantes connexes est fini, ces connexes sont aussi ouverts. Chaque $C(x)$ est contenue dans tous les fermés-ouverts F qui contiennent x : en effet, $C(x) = C(x) \cap F + \left(C(x) - F\right)$ qui sont deux fermés, donc $C(x) - F$ est vide (quand l'espace est compact, il y a égalité).

Un espace est dit localement connexe en l'un de ses points x si x a une base de voisinages connexes, c'est-à-dire si tout voisinage de x contient un voisinage connexe de x.
Un espace localement connexe en chacun de ses points est dit localement connexe.
$\mathbb{R}$ est connexe et localement connexe ; $\mathbb{Q}$ n'est ni connexe, ni localement connexe.

Dans $\mathbb{R}$, la réunion de deux intervalles ouverts disjoints est un espace non connexe mais localement connexe. Dans $\mathbb{R}^2$, soit S_x le segment de droite d'extrémités $(0,1)$ et $(x,0)$: la réunion des S_x quand x décrit $\mathbb{Q}$ est connexe et non localement connexe (démonstration ci-après).

Les composantes connexes d'un espace localement connexe sont ouvertes : si u est dans une composante $C(x)$, il existe un voisinage $v(u)$ de u connexe, donc

$C(x) \cup v(u)$ est un connexe contenant x, $v(u) \subset C(x)$, et $C(x)$ est ouverte.

Si E non connexe a une composante connexe non ouverte, il n'est pas localement connexe. Plus précisément, si u n'est pas dans l'intérieur d'une composante, E n'est pas localement connexe en u : l'ensemble des points de non connexité locale de E est donc la somme des frontières des composantes connexes de E.

Un exemple d'espace connexe et non localement connexe.

Dans $\mathbb{R}^2$, soit S_x le segment de droite d'extrémités $(0,1)$ et $(x,0)$: la réunion E des S_x quand x décrit $\mathbb{Q}$ est connexe et non localement connexe. On désigne par a le point $(0,1)$.

a) E est connexe comme réunion de connexes d'intersection non vide, et même connexe par arcs.

b) E est localement connexe en a.

En effet, l'intersection $B(a,r) \cap E$ est constituée d'intervalles d'origine a.

c) $E-\{a]$ n'est pas connexe (Michel Wirth)

Soit $P(t)$ et $Q(t)$ les deux demi-plans ouverts délimités par la droite qui porte le segment S_t, t réel.

Comme $E-\{a]$ est la somme (dénombrable) disjointe des $S_q-\{a\}$ quand q décrit $\mathbb{Q}$, pour tout t irrationnel, $E-\{a]$ est la somme de deux ouverts non vides disjoints car $E-\{a\} = P(t) \cap (E-\{a\}) + Q(t) \cap (E-\{a\})$.

d) Les composantes connexes de $E-\{a]$ sont les $S_q-\{a\}$.

Soit $C(x)$ une composante connexe de $E-\{a]$.

L'élément x appartient à un $S_q-\{a\}$ et à un seul et $S_q-\{a\} \subset C(x)$. Si $S_q-\{a\} \neq C(x)$, $C(x)$ rencontrerait un $S_r-\{a\}$ avec r distinct de q. Alors, pour t irrationnel entre q et r, $C(x) = P(t) \cap C(x) + Q(t) \cap C(x)$ ne serait pas connexe.

e) $E-\{a]$ n'est pas localement connexe

En effet, chaque composante connexe $S_q-\{a\}$ est d'intérieur vide. $E-\{a]$ n'est localement connexe en aucun de ses points.

f) E n'est localement connexe qu'en a.

C'est la conséquence des assertions **b)** et **e)**.

g) Démonstration directe de la non connexité locale de E.

E n'est pas localement connexe en $O=(0,0)$ par exemple, le voisinage $B(O,1/2) \cap E$ ne contenant aucun voisinage connexe de O. Montrons pour cela qu'aucun $v(0,0)$, ou $v(O)$, contenu dans $B(O,1/2) \cap E$ n'est connexe. Ce $v(0,0)$ contient un $B(O,r) \cap E$, avec $0<r<1/2$, et $B(O,r) \cap E$ rencontre S_0 et un S_q, avec q rationnel non nul. Si t est un irrationnel entre 0 et q :

$v(0,0)$ est la réunion disjointe des deux ouverts non vides $v(0,0) \cap P(t)$ et $v(0,0) \cap Q(t)$.

Question : trouver un connexe qui n'est localement connexe en aucun de ses points.