SUR LE THÉORÈME DE CESARO

par Alain Rémondière et Emmanuel Cabanillas
(rédaction Daniel Saada)

$B = l^\infty(\mathbb{N})$ est le Banach des suites réelles ou complexes bornées $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, normé par $\|x\| = \sup_n |x_n|$;

T est l'opérateur continu de B dans B défini par $T(x) = y$ où $y_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_0^n x_k$.

Soit C le sous-espace de B formé des suites convergentes, et

$C_1 = \{x \in B : T(x) \in C\} = T^{-1}(C)$ [1]

$C_2 = \{x \in B : T(x) \in C_1\} = \{x \in B : T^2(x) \in C\}$.

Le théorème de Cesaro assure que $C \subset C_1 \subset C_2$. Nous nous proposons de prouver les deux assertions :

A) $C_1 = C_2$;

B) aucun supplémentaire de C dans C_1 n'est de dimension dénombrable.

PARTIE A : $C_1 = C_2$

Soit u dans C_2 ; on pose $v = T(u)$, $w = T(v) = T^2(u)$, $\varepsilon_n = v_n - w_n$.

Pour prouver que u est dans C_1, il faut et il suffit d'établir que $\varepsilon \in C$ car $w \in C$.

1) La suite $n(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})$ est bornée

De $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_0^n u_k$ et $w_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_0^n v_k$, on déduit sans mal $v_n = (n+1)w_n - nw_{n-1}$ et $u_n = (n+1)v_n - nv_{n-1}$.

Les suites $n(v_n - v_{n-1}) = u_n - v_n$ et $n(w_n - w_{n-1}) = v_n - w_n$ sont bornées puisque (u_n), (v_n), (w_n) le sont.

Comme $\varepsilon_n = n(w_n - w_{n-1})$, $n(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) = n(v_n - v_{n-1}) - n(w_n - w_{n-1})$ qui est donc bornée.

2) $\varepsilon_n \to 0$

Puisque u est dans C_2, la suite (w_n) converge, la série $\sum_n (w_n - w_{n-1})$ converge et donc $\sum_{n\ge1} \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

Montrons à présent que $\varepsilon_n \to 0$. En séparant les parties réelle et imaginaire de ε_n, on peut supposer ε_n réelle.

On va raisonner par l'absurde en supposant que ε_n ne tend pas vers 0 et on va en déduire que la série $\sum_{n\ge1} \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ diverge. Quitte à changer ε_n en $-\varepsilon_n$, il existe donc un réel $c > 0$ tel que $\varepsilon_n \ge c$ pour une infinité d'indices n, notée I. Soit $A > 0$ tel que $|\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}| \le A/n$ (si $A = 0$ et posons $D = e^{c/2A} - 1, D > 0$: on vérifie que $p \le nD$ implique $c - A(\ln(n+p) - \ln n) \ge c/2 > 0$.

D'autre part, si $1 \le p \le nD$, alors $|\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n| \le A\sum_{n+1}^{n+p} 1/k \le A(\ln(n+p) - \ln n)$, d'où l'on déduit $\varepsilon_{n+p} \ge \varepsilon_n - A(\ln(n+p) - \ln n)$. Si $n \in I$, on a $\varepsilon_{n+p} \ge c - A(\ln(n+p) - \ln n) \ge c/2$ quand $p \le nD$.

[1] Il existe des suites non bornées qui convergent en moyenne, par exemple $(-1)^n\sqrt{n}$.

Donc, si $n\in I$, $\sum_{p=0}^{nD}\frac{\varepsilon_{n+p}}{n+p}\geq\frac{c}{2}\sum_{p=0}^{nD}\frac{1}{n+p}\geq\frac{c}{2}(\ln(n+nD+1)-\ln n)\geq\frac{c}{2}\ln(D+1)$.

Il en résulte qu'en posant $S_n=\sum_1^n\frac{\varepsilon_k}{k}$, $S_{n+nD}-S_{n-1}\geq\frac{c}{2}\ln(D+1)>0$ pour $n\in I$; comme I est infini, la suite S_n n'est pas de Cauchy et donc diverge.

3) $u\in C_1$

Comme $v_n=\varepsilon_n+w_n$, v_n converge et a la même limite que w_n : ainsi, $v\in C$ et $u\in C_1$.

PARTIE B : aucun supplémentaire de C dans C_1 n'est séparable

1) Pour $\theta\in]0,2\pi[$, la suite bornée x_θ définie par $x_\theta(n)=e^{in\theta}$ est dans C_1 mais n'est pas dans C :

- $\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}e^{ip\theta}=\frac{1}{n+1}\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini ;
- si x_θ convergeait, sa limite ℓ serait 0, mais c'est impossible car ℓ doit être de module 1.

2) Soit F le sous-espace de C_1 engendré par les x_θ : $C\cap F=0$

Par linéarité, toutes les suites de F convergent en moyenne vers 0.

Supposons que la suite $x_n=\lambda_1e^{in\theta_1}+\ldots+\lambda_pe^{in\theta_p}$ converge, les θ_i étant *distincts* et les λ_i *tous non nuls*.

On a $x_{n+1}=\lambda_1e^{i\theta_1}e^{in\theta_1}+\ldots+\lambda_pe^{i\theta_p}e^{in\theta_p}$,..., $x_{n+p-1}=\lambda_1e^{i(p-1)\theta_1}e^{in\theta_1}+\ldots+\lambda_pe^{i(p-1)\theta_p}e^{in\theta_p}$, ce qui s'écrit matricielle-ment

$$\begin{pmatrix}x_n\\x_{n+1}\\\ldots\\x_{n+p-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\ldots&\lambda_p\\\lambda_1e^{i\theta_1}&\lambda_2e^{i\theta_2}&\ldots&\lambda_pe^{i\theta_p}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\\lambda_1e^{i(p-1)\theta_1}&\lambda_2e^{i(p-1)\theta_2}&\ldots&\lambda_pe^{i(p-1)\theta_p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{in\theta_1}\\e^{in\theta_2}\\\ldots\\e^{in\theta_p}\end{pmatrix}.$$

La matrice du système est inversible, donc $e^{in\theta_1}$ est combinaison linéaire des $x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+p-1}$ et alors $e^{in\theta_1}$ serait convergente, ce qui ne se peut pas : la seule suite convergente de F est la suite nulle.

3) L'adhérence $\overline{F}$ de F est un sous-espace de C_1 tel que $C\cap\overline{F}=0$

$\overline{F}$ est dans C_1 car C_1 est fermé dans B : en effet, C est fermé, T est continu, $C_1=T^{-1}(C)$.

étape 1 : $C_0\cap\overline{F}=0$, où C_0 est l'espace des suites de limite nulle.

On introduit l'endomorphisme g de B défini par $g(x)=y$ où $y_n=x_{n+1}$: g est continu car $\|y\|\leq\|x\|$, g laisse stable C, C_0, et F puisque $g(x_\theta)=e^{i\theta}x_\theta$. Comme g est continu, $\overline{F}$ est aussi stable par g.

Si $x\in C_0$, $\lim_n g^n(x)=0$; si on arrive à prouver que sur $x\in\overline{F}$, $\|g^n(x)\|=\|x\|$ pour tout n, il en résultera que $C_0\cap\overline{F}=0$.

Pour prouver que $\|g^n(x)\|=\|x\|$ pour tout n sur $\overline{F}$, il suffit de prouver que $\|g(x)\|=\|x\|$ sur $\overline{F}$.

Soit donc x dans F, $x_n=\lambda_1e^{in\theta_1}+\ldots+\lambda_pe^{in\theta_p}$: les p suites $n\to e^{in\theta_k}$ étant bornées, il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_l) telle que les p suites $n_l \to e^{in_l\theta_k}$ soient simultanément convergentes.

En posant $m_l = n_{l+1} - n_l$ ($m_\ell \geq 1$), il en résulte que les p suites $e^{im_l\theta_k}$ ont pour limite 1 quand l tend vers l'infini. En conséquence, x_{m_l} a pour limite $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = x_0$ et alors $\|g(x)\| \geq \|x_0\|$; comme $\|x\| = \max(|x_0|, \|g(x)\|)$, il vient $\|g(x)\| = \|x\|$.

étape 2 : $C \cap \overline{F} = 0$

Soit $x \in C \cap \overline{F}$: la suite $x - g(x)$ est de limite nulle et reste dans $\overline{F}$, donc $x - g(x) = 0$ et x est une suite *constante.*

Reste à démontrer que la seule suite constante c de $\overline{F}$ est la suite nulle. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in F$ telle que $\|c - x\| \leq \varepsilon$, $x_n = \lambda_1 e^{in\theta_1} + \ldots + \lambda_p e^{in\theta_p}$, donc $|x_n = \lambda_1 e^{in\theta_1} + \ldots + \lambda_p e^{in\theta_p} - c| \leq \varepsilon$ pour tout n.

On en déduit $\left|\dfrac{1}{n+1}\sum_0^n x_k - c\right| = \left|\dfrac{\sum_0^n (x_k - c)}{n+1}\right| \leq \varepsilon$; en passant à la limite, $|c| \leq \varepsilon$, et donc $c = 0$.

4) $\overline{F}$ est de dimension infinie non dénombrable

Il suffit de le démontrer pour F :

a) Si θ et θ' sont distincts, $\|x_\theta - x_{\theta'}\| \geq \sqrt{3}$.

En effet, $|e^{in\theta} - e^{in\theta'}| = 2\left|\sin\left(\dfrac{n(\theta-\theta')}{2}\right)\right|$; on distingue deux cas :

si $\dfrac{\theta-\theta'}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, $\sin\left(\dfrac{n(\theta-\theta')}{2}\right)$ est dense dans $[-1,1]$ et alors $\|x_\theta - x_{\theta'}\| = 2$;

si $\dfrac{\theta-\theta'}{2\pi}$ est un rationnel $\dfrac{p}{q}$, $2\left|\sin\left(\dfrac{n(\theta-\theta')}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\dfrac{np}{q}\pi\right)\right|$; en écrivant $np = kq + r$,

$\left|\sin\left(\dfrac{np}{q}\pi\right)\right| = \left|\sin\left(\dfrac{r}{q}\pi\right)\right|$ où l'entier r va de 0 à $q-1$. Si q est pair et $r = q/2$, $\left|\sin\left(\dfrac{r}{q}\pi\right)\right| = 1$; si $q = 2q'+1$ et $r = q'$

$\left|\sin\left(\dfrac{r}{q}\pi\right)\right| \geq \left|\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $\|x_\theta - x_{\theta'}\| \geq \sqrt{3}$ dans tous les cas.

b) F n'est pas séparable

S'il existait une suite dense (u_n) dans F, alors pour chaque réel θ existerait un entier n tel que $\|x_\theta - u_n\| < \sqrt{3}/2$: un entier n ne pouvant servir pour deux θ distincts, c'est impossible par cardinalité.
On en déduit que C_1 et B ne sont pas séparables.

c) F n'est pas de dimension dénombrable
Un espace non séparable est *a fortiori* de dimension non dénombrable. En effet, un espace vectoriel de dimension dénombrable est séparable car il est réunion dénombrable d'espaces vectoriels de dimension finie et tout espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$ est séparable.

5) Aucun supplémentaire D de C dans C_1 n'est séparable

Si D était séparable, C_1 le serait, or C_1 contient F non séparable. Puisque $C \cap \overline{F} = 0$, il existe un supplémentaire de C qui contient le Banach non séparable $\overline{F}$.