UNE SEULE GAGNANTE

www.daniel-saada.eu

Source : http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?12,829181

On prend une à une chaque pièce d'un tas , on la jette tant qu'elle affiche "face" et on note le nombre de jets nécessaires pour obtenir enfin "pile" . On effectue la même opération pour chaque pièce . Quand le tas est épuisé, on déclare gagnantes les pièces ayant nécessité le plus de jets avant d'afficher "pile" .
Soit p_n la probabilité d'avoir une *unique* pièce gagnante quand le tas comporte n pièces.
Évidemment, $p_1 = 1$ et on posera $p_0 = 0$.

1) Calcul des p_n

Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur n s'il a fallu n lancers à la pièce i pour donner pile ; $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des lois géométriques indépendantes de paramètre $1/2$: $p(X_i = k) = 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, $p_n = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} P(X_j = k \text{ et } \forall i \neq j, X_i \leq k-1) = \sum_{k=1}^{\infty} n\dfrac{(1-0,5^{\,k-1})^{n-1}}{2^k}$ et donc

$p_n = n\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(1-0,5^{\,k-1})^{n-1}}{2^k} = n\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{(1-0,5^{\,k-1})^{n-1}}{2^k}$. En particulier, $p_2 = 2\sum_{1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^k} - \dfrac{1}{2^{2k-1}}\right) = \dfrac{2}{3}$.

2) Expérimentation numériques

Les probabilités p_n varient peu : $p_{10} = 0,72125$, $p_{20} = 0,72130$; elles semblent se rapprocher de $1/\ln(4) = 0,72135$.
Voici les premières valeurs extrémales des différences $p_n - 1/\ln(4)$ (Claude Morin) :

$n = 163: \ -0.92\times 10^{-5}$	$n = 328: \ -0.81\times 10^{-5}$	$n = 656: \ -0.76\times 10^{-5}$	$n = 1313: \ -0.74\times 10^{-5}$
$n = 232: \ 0.85\times 10^{-5}$	$n = 464: \ 0.78\times 10^{-5}$	$n = 929: \ 0.75\times 10^{-5}$	$n = 1859: \ 0.73\times 10^{-5}$

3) Relation de récurrence entre les p_n

Il revient au même d'imaginer qu'on lance en l'air le tas de n pièces une première fois. Puis on ne garde que les pièces qui ont donné face et on les relance ensemble. On recommence jusqu'à avoir un tas vide : p_n est la probabilité d'avoir une seule pièce à l'avant-dernière étape, événement noté E_n.

La probabilité que k pièces exactement aient donné face est $C_n^k \dfrac{1}{2^k}\dfrac{1}{2^{n-k}} = \dfrac{C_n^k}{2^n}$.

E_n se décompose en la réunion disjointe $\bigcup_0^n (k \textit{ faces} \text{ et } E_k)$

et donc $p_n = \sum_0^n P(k \textit{ faces} \text{ et } E_k) = \sum_0^n P(k \textit{ faces}).P(E_k)$, avec bien sûr $P(E_0) = 0$,

d'où $p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k \dfrac{C_n^k}{2^n}$ et $(2^n - 1)p_n = \sum_{k=1}^{n-1} p_k C_n^k$.

On obtient facilement $p_3 = 5/7$ et $p_4 = 76/105$, tous les p_n étant rationnels.

4) Encadrements des p_n

a) $p_n \geq p_2 = 2/3$

D'abord $p_1 = 1$ et $p_2 = 2/3$.

En supposant $p_1, p_2, ..., p_{n-1} \geq 2/3$ et $n \geq 3$:

$$p_n(2^n - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k C_n^k = n + \sum_{k=2}^{n-1} p_k C_n^k \geq n + \frac{2}{3}\left(2^n - n - 2\right) = \frac{2}{3}\left(2^n - 1\right) + \frac{n-2}{3}$$

et donc $p_n \geq 2/3$.

b) $p_n \leq p_4 = 76/105 = 0,72381$ **(Claude Morin)**

On suppose $p_k \leq 76/105$ jusqu'au rang $n-1$: alors, $(2^n - 1)p_n \leq n + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{5}{7}C_n^3 + \frac{76}{105}(2^n - 2 - n - C_n^2 - C_n^3)$.

Pour obtenir $(2^n - 1)p_n \leq (2^n - 1)\frac{76}{105}$, il suffit que $n + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{5}{7}C_n^3 \leq \frac{76}{105}(1 + n + C_n^2 + C_n^3)$, ce qui est équivalent après simplifications à $(n-4)(n^2 + 19n - 114) \geq 0$, qui est vrai.

c) $p_n \geq 0,7115$ **(** $n \geq 3$ **) (Claude Morin)**

La minoration par 0,7115, plus longue à justifier, est laissée au lecteur...

5) Si p_n a une limite l , $l = 1/\ln(4)$.

Soit $f(x) = \sum_{0}^{\infty} p_n \frac{x^n}{n!}$ et $g(x) = f(x)e^{-x}$.

a) on sait[1] que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} l.e^x$, ou plus exactement, $\lim_{+\infty} f(x)e^{-x} = l$.

b) avec $p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{C_n^k}{2^n}$, $f(2x) = f(x)e^x + x$ et donc $g(2x) = g(x) + xe^{-2x}$.

c) $g(x) = l - x\sum_0^\infty 2^n \exp(-2^{n+1}x)$ pour $x > 0$.

En sommant $g(2^k x) = g(2^{k-1}x) + 2^{k-1}x\exp(-2^k x)$ pour k allant de 1 à n, il vient

$g(2^n x) = g(x) + x\sum_0^{n-1}\left(2^{k-1}\exp(-2^k x)\right)$. Pour $x > 0$, $2^n x \to +\infty$ avec n et $g(2^n x) \to l$, d'où

$g(x) = l - x\sum_0^\infty 2^n \exp(-2^{n+1}x)$.

d) $l = 1/\ln(4)$.

La fonction $t \mapsto 2^t \exp(-2^{t+1}x)$ décroît sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\int_0^{+\infty} 2^t \exp(-2^{t+1}x)\,dt \leq \sum_0^\infty 2^n \exp(-2^{n+1}x) \leq \exp(-2x) + \int_0^{+\infty} 2^t \exp(-2^{t+1}x)\,dt.$$

Comme $\int_0^{+\infty} 2^t \exp(-2^{t+1}x)\,dt = \left[\frac{\exp(-2^{t+1}x)}{-2x\ln 2}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{e^{-2x}}{x\ln 4}$, $\lim_{0^+} x\sum_0^\infty 2^n \exp(-2^{n+1}x) = 1/\ln 4$.

On passe à la limite en 0^+ dans $g(x) = l - x\sum_0^\infty 2^n \exp(-2^{n+1}x)$: avec $g(0) = 0$, il vient $l = 1/\ln(4)$.

Remarque. $p_n = \sum_{k=1}^\infty \varphi_n(k)$, avec $\varphi_n(x) = n\frac{1}{2^x}\left(1 - \frac{2}{2^x}\right)^{n-1}$ et $\int_1^{+\infty} \varphi_n(x)dx = \frac{1}{2\ln(2)}$.

[1] Consulter par exemple http://blog.mp933.fr/public/dsmp/2011_2012/DS1-ENONCE.pdf

6) Les p_n et la fonction périodique $h(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} 2^{n+x-1}\exp(-2^{n+x})$

La professeur Jean-Louis Tu a découvert h de la façon suivante. Posons $n=2^{m+x}$, avec m entier et $0\le x<1$:

$$p_n=\sum_{k=2}^{\infty} n2^{-k}(1-2^{-k+1})^{n-1}=\sum_{k=2}^{\infty}2^{m+x-k}(1-2^{-k+1})^{2^{m+x}-1}$$

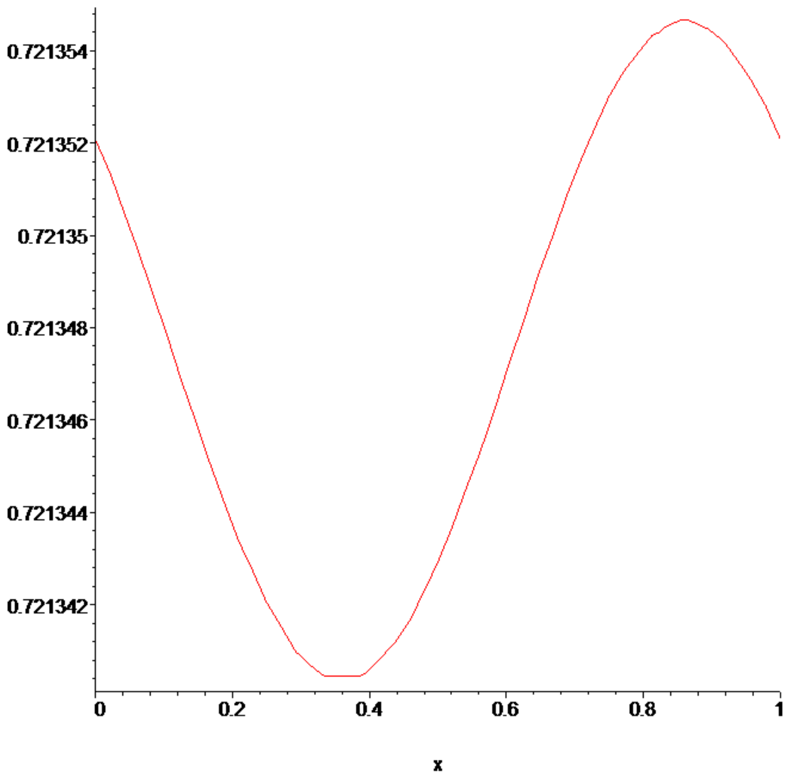
$$=\sum_{k=2}^{\infty}2^{m+x-k}\exp\left(2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-k+1}\right)$$

$$\simeq\sum_{k=2}^{\infty}2^{m+x-k}\exp\left(2^{m+x}\times -2^{-k+1}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}2^{m+x-k}\exp\left(-2^{m+x-k+1}\right).$$

Quand n est grand, m aussi et alors $\sum_{k=2}^{\infty}2^{m+x-k}\exp\left(-2^{m+x-k+1}\right)=\sum_{k=-\infty}^{m-2}2^{x+k}\exp\left(-2^{x+k+1}\right)$ est proche de $h(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}2^{n+x-1}\exp(-2^{n+x})$. Aussi p_n est-il voisin de $h(x)$; comme h est de période 1, $p_n\approx h(\ln n/\ln 2)$.

Le graphe de h sur une période explique la multiplication par deux des abscisses des extremums locaux des p_n :



En effet, h est minimale (0,7213404) en $x=0,36$, maximale (0,7213547) en $x=0,86$.
Les p_n seront minimales en $n=2^{k+0,36}$, maximales pour $n=2^{k+0,86}$; la série des $n=2^{k+0,36}$ épouse bien les abscisses des premiers minimums : 163, 328, 656, 1313.

Comme h est de période 1 et de classe C^1, h est la somme de sa série de Fourier :

$$h(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(2\pi nx)+b_n\sin(2\pi nx)\right)$$

avec $a_0=\int_0^1 h$, et pour $n\geq 1$, $a_n=2\int_0^1 h(x)\cos(2\pi nx)dx$ et $b_n=2\int_0^1 h(x)\sin(2\pi nx)dx$.

Calcul de a_0. On peut intervertir intégrale et sommation car il y a convergence normale :

$$a_0=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^1 2^{n+x-1}\exp(-2^{n+x})\,dx\right)\ ;$$

$$\int_0^1 2^{n+x-1}\exp(-2^{n+x})\,dx=\left[\frac{\exp(-2^{n+x})}{-2\ln 2}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{2\ln 2}\left(\exp(-2^n)-\exp(-2^{n+1})\right).$$

Si on pose $u_n=\exp(-2^n)$, $n\in\mathbb{Z}$, $2\ln(2)a_0=\sum_{\mathbb{Z}}(u_n-u_{n+1})=\sum_0^{+\infty}(u_n-u_{n+1})+\sum_{-\infty}^{-1}(u_n-u_{n+1})$

$2\ln(2)a_0=u_0-\lim_{+\infty}u_n+(-u_0+\lim_{-\infty}u_n)=1$ et donc $a_0=1/\ln(4)$.

Calcul de a_n **et** b_n. On utilise la méthode des rectangles, très adaptée aux fonctions périodiques dérivables[2].

Avec 100 pas, $a_n=2\int_0^1 h(x)\cos(2\pi nx)dx\simeq\frac{2}{100}\sum_{i=0}^{99}h(i/100)\cos(2\pi ni/100)$ par exemple, ce qui donne, après avoir mémorisé les 100 valeurs $h(i/100)$:

$a_1=0.4583\times 10^{-5}$ et $b_1=-0.5462\times 10^{-5}$,

$a_2=0.2\times 10^{-11}$ et $b_2=0.16\times 10^{-10}$, ce qui est sujet à caution car trop proche des erreurs de calcul, d'arrondis et de méthode. Les coefficients de Fourier semblant décroître très rapidement, on se bornera donc à :

$$h(x)\approx 1/\ln 4+0.4583\times 10^{-5}\cos(2\pi x)-0.5462\times 10^{-5}\sin(2\pi x).$$

Pour $n=1313$, $h-1/\ln 4$ et son approximation donnent toutes deux -0.71×10^{-5} (au lieu de -0.74×10^{-5}).

7) $\boxed{p_n-h(\ln n/\ln 2)\to 0}$ **(Jean-Louis Tu)**

Rappelons que pour $n=2^{m+x}$, avec m entier et $0\leq x<1$,

$$p_n=\sum_{k=2}^{\infty}n2^{-k}(1-2^{-k+1})^{n-1}=\sum_{k=2}^{\infty}2^{m+x-k}\exp\left(2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-k+1}\right).$$

En posant $j=-m+k-1$, $p_n=\sum_{j=-m+1}^{+\infty}2^{x-j-1}\exp\left(2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-j-m}\right)$

Posons $U_{m,x}(j)=2^{x-j-1}\exp\left((2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-j-m})\right)$ quand $j\geq -m+1$ et $U_{m,x}(j)=0$ sinon, alors :

$$p_n=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}U_{m,x}(j).$$

Plus généralement, on posera, pour $(m,x)\in\mathbb{N}\times[0,1[$, $p_{m,x}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}U_{m,x}(j)$, p_n valant $p_{m,x}$ quand

$x=\frac{\ln(2^m+k)}{\ln 2}-m$, k entier entre 0 et 2^m-1.

$U_{m,x}(j)\leq 2^{-j+1}\exp\left(-2^{-j+1}\right)$: comme $x\in[0,1[$ et $\ln(1-2^{-j-m})\leq -2^{-j-m}$,

$U_{m,x}(j)\leq 2^{-j}\exp\left(-(2^{m+1}-1)2^{-j-m}\right)=2^{-j}\exp\left(-2^{-j+1}\right)\times\exp\left(2^{-j-m}\right)\leq 2^{-j+1}\exp\left(-2^{-j+1}\right)$,

inégalité encore vraie quand $j<-m+1$.

[2] http://www.daniel-saada.eu/Notes/Exercice_Oral_2008.pdf

$\lim_m U_{m,x}(j) = 2^{x-j+1}\exp\left(-2^{-j+x}\right) = U_x(j)$ et $U_x(j) \le 2^{-j+1}\exp\left(-2^{-j+1}\right)$ en passant à la limite.

Soit j fixé dans $\mathbb{Z}$: pour $m \ge -j+1$, $U_{m,x}(j) = 2^{x-j-1}\exp\left((2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-j-m})\right)$.

Quand $m \to +\infty$, $(2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-j-m})$ a pour limite -2^{-j+x} et donc $\lim_m U_{m,x}(j) = 2^{x-j+1}\exp\left(-2^{-j+x}\right)$.

La convergence de $U_{m,x}(j)$ vers $U_x(j)$ est uniforme quand $x \in [0,1[$.

D'abord, $(2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-j-m}) + 2^{-j+x} \le \dfrac{-(2^{m+x}-1)}{2^{j+m}} + 2^{-j+x} = \dfrac{1}{2^{j+m}}$,

d'autre part,

$$(2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-j-m}) + 2^{-j+x} \ge 2^{m+x}\ln(1-2^{-j-m}) + 2^{-j+x} = 2^{m+x}\left(\ln(1-2^{-j-m}) + 2^{-j-m}\right)$$

et

$$2^{m+x}\left(\ln(1-2^{-j-m}) + 2^{-j-m}\right) \ge 2^{m+1}\left(\ln(1-2^{-j-m}) + 2^{-j-m}\right)$$

donc

$$2^{m+1}\left(\ln(1-2^{-j-m}) + 2^{-j-m}\right) \le (2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-j-m}) + 2^{-j+x} \le \frac{1}{2^{j+m}}.$$

Comme $2^{m+1}\left(\ln(1-2^{-j-m}) + 2^{-j-m}\right) \sim 2^{-m-2j}$, la convergence de $(2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-j-m})$ vers sa limite 2^{-j+x} est uniforme pour $x \in [0,1[$.

On en déduit facilement la convergence uniforme de $\exp\left((2^{m+x}-1)\ln(1-2^{-j-m})\right)$ vers sa limite $\exp\left(-2^{-j+x}\right)$.

Comme x est borné, $U_{m,x}(j)$ converge aussi uniformément vers $2^{x-j+1}\exp\left(-2^{-j+x}\right)$.

Notons $c_j = 2^{-j+1}\exp\left(-2^{-j+1}\right)$. La série à termes positifs $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j$ converge car $c_j \sim 2^{-j+1}$ quand $j \to +\infty$ et $c_j \le 2^j$ à partir d'un certain rang quand $j \to -\infty$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe N entier tel que $\sum_{|j|>N} c_j < \varepsilon/4$.

Rappelons que $U_{m,x}(j)$ et $U_x(j)$ sont majorés par c_j.

$$\begin{aligned}|p_{m,x} - h(x)| = \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} U_{m,x}(j) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} U_x(j)\right| &\le \sum_{|j|\le N}\left|U_{m,x}(j) - U_x(j)\right| + \sum_{|j|>N} U_{m,x}(j) + \sum_{|j|>N} U_x(j)\\ &\le \sum_{|j|\le N}\left|U_{m,x}(j) - U_x(j)\right| + 2\sum_{|j|>N} c_j.\end{aligned}$$

Par convergence uniforme, il existe un entier M tel que pour $m \ge M$, $j \in \{-N,\dots\dots,N\}$ et $x \in [0,1[$ on ait $\left|U_{m,x}(j) - U_x(j)\right| < \dfrac{\varepsilon}{4N+2}$. Il en résulte que pour $m \ge M$ et $x \in [0,1[$, $|p_{m,x} - h(x)| < \varepsilon$ et donc que pour $n \ge 2^m$, $n = 2^{m+x}$, x variant dans $[0,1[$, $|p_n - h(x)| < \varepsilon$; comme h est de période 1 : $p_n - h(\ln n/\ln 2) \to 0$.

8) La suite p_n ne converge pas

Si p_n converge, il en est de même de $u_n = h(\ln n/\ln 2)$. Comme $u_{2n} = u_n$, la limite u de u_n vaudrait à la fois u_2, u_3 et u_p pour tout p premier : $h(\ln p/\ln 2)$ serait constante pour tout p premier, ce qui n'est pas. On a aussi

h(1)=0,7213521033 h(ln3/ln2)= 0,7213463546 h(ln5/ln2)=0,7213406052

(ne pas oublier que h varie seulement de 0,7213404 à 0,7213547).